# GRONWALL-VERFAHREN

DIPLOMARBEIT

VON

HIERONYMUS FISCHER

FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

DER FERNUNIVERSITÄT HAGEN

DIESE ARBEIT ENTSTAND UNTER ANLEITUNG VON

HERRN PROF. DR. W. BEEKMANN

LEHRGEBIET ANALYSIS

NOVEMBER 1981

## INHALTSVERZEICHNIS

# 1. GRUNDLAGEN

## 1.1 Einleitung

In seiner Arbeit [11] hat Gronwall eine mit gewissen konformen Abbildungen zusammenhängende Klasse von Limitierungsverfahren eingeführt. Er definiert Summationsverfahren auf der Grundlage zweier analytischer Funktionen f und g mit den folgenden Eigenschaften: (mit $E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$ )

1.1.1 (i) f ist holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$ und stetig in 1.

(ii) f ist schlicht in E und $f(E) \subset E$

(iii) $f(0)=0$ und $f(1)=1$

(iv) Die Umkehrfunktion von f ist holomorph auf $f(\bar{E})-\{1\}$

(v) Es gibt ein $\lambda \geq 1$ und eine um den Nullpunkt entwickelbare Potenzreihe $\Phi$ mit nicht verschwindendem Konvergenzradius, so daß $\Phi(0) > 0$ und $1-w=(1-z)^{\lambda}\,\Phi(1-z)$ für $z = f(w)$ genügend nahe bei 1.

Ferner sei

1.1.2 (i) $g(w) = (1-w)^{-\alpha} + \gamma(w)$ mit $\alpha > 0$ und $\gamma$ holomorph auf $\bar{E}$

(ii) $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$

(iii) $g(w) \neq 0$ für alle $w \in E$

Der formalen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ ordnet Gronwall eine über die Identität

1.1.3 $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n \quad , \quad z = f(w) ,$$

definierte Folge $(U_n)$ zu und nennt die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ $(f,g)$-summierbar zur Summe s, wenn $U_n \to s$ für $n \to \infty$.

Wir bemerken, daß in diesem Fall die zunächst nur formal definierte Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ im Nullpunkt holomorph ist (siehe hierzu Lemma 1.3.4).
Entsprechend nennen wir eine Folge $(s_n)$ $(f,g)$-limitierbar zur Summe $s$, wenn eine Identität

1.1.4 $$(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

besteht, und $U_n \longrightarrow s$ für $n \longrightarrow \infty$.
Wegen $f(0) = 0$ können wir die transformierte Folge $(U_n)$ in der Form

1.1.5 $$U_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} u_\nu$$

ausdrücken, wobei die $a_{n\nu}$ nur von $f$ und $g$ abhängen.

Mit $z = f(w) =: \sum_{\mu=1}^{\infty} c_\mu w^\mu$ erhalten wir in der Tat

$$z^\nu =: \sum_{\mu=\nu}^{\infty} c_\mu^{(\nu)} w^\mu$$

also $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^{(\nu)} w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_n^{(\nu)} u_\nu w^n =: \sum_{n=0}^{\infty} u_n' w^n$$

und folglich $$g(w) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\mu} c_\mu^{(\nu)} u_\nu b_{n-\mu} w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \sum_{\mu=\nu}^{n} c_\mu^{(\nu)} b_{n-\mu} w^n$$

Daher haben wir 1.1.5 mit $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ und

1.1.6 $$a_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{b_{n-\mu}}{b_n} c_\mu^{(\nu)}, \quad 0 \le \nu \le n, \ n \in \mathbb{N}^0$$

Mit anderen Worten: Jedes Gronwall-Verfahren $(f,g)$ ist ein zeilenfinites Matrixverfahren. Die zugehörige RF-Matrix ist durch 1.1.6 bestimmt.

Wir können die Folge $(U_n)$ noch auf eine andere Weise aus den $u_\nu$ berechnen. Nach der Cauchyschen Integralformel erhalten wir nämlich für geeignete, den Nullpunkt im Holomorphiegebiet des Integranden einmal umschließende Wege $C$ aus 1.1.3

1.1.7 $$U_n = \frac{1}{2\pi i\, b_n} \int_C g(w)\, \Phi \circ f(w) \frac{dw}{w^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^0$$

Dabei haben wir $\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ gesetzt.

Auch für 1.1.6 bekommen wir eine Integraldarstellung. Dazu betrachten wir die Transformation der Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu k}$ ($\delta_{\nu k}$: Kroneckersymbol)

Nach 1.1.5 gilt $U_n^{(k)} = a_{nk}$ $(n,k \in \mathbb{N}^0)$. Daher wird 1.1.7 zu

1.1.8 $$a_{nk} = \frac{1}{2\pi i\, b_n} \int_C g(w)\left[f(w)\right]^k \frac{dw}{w^{n+1}}, \quad 0 \le k \le n$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen der Übertragungsmatrix $(a_{n\nu})$ können wir leicht berechnen. Wir berufen uns hierzu auf 1.1.6 und bemerken $c_n^{(n)} = c_1^n = \left[f'(0)\right]^n$

Somit gilt

1.1.9 $$a_{nn} = \frac{b_0}{b_n}\left[f'(0)\right]^n, \quad n \in \mathbb{N}^0.$$

Insbesondere ist $a_{nn} \neq 0$, weil $f$ als schlicht in $E$ vorausgesetzt war, also $f'(0) \neq 0$ notwendig gilt.

Auch für "einfache" Funktionen f und g ist die Berechnung der Koeffizienten $a_{n\nu}$ auf dem durch 1.1.6 vorgegebenen Weg schwierig und in vielen Fällen ein aussichtsloses Unterfangen. Besonders unangenehm gestaltet sich dabei meist die Bestimmung der $c_n^{(\nu)}$. Um diese zu berechnen ist jedoch manchmal der Umweg über die inverse Funktion $h := f^{-1}$ gangbar:

1.1.10 $$c_n^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta_\varrho(0)} \zeta^\nu \frac{h'(\zeta)\, d\zeta}{[h(\zeta)]^{n+1}} \quad , \; 0 \le \nu \le n, \, n \in \mathbb{N}^0$$

Hierbei ist $\varrho$ genügend klein aber positiv zu wählen. Unter $\Delta_\varrho(z)$ wollen wir die Menge $\{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta - z| < \varrho\}$ verstehen.

Ein (f,g)-Verfahren können wir als Produkt eines allgemeinen Euler-Verfahrens mit einem Nörlund-Verfahren darstellen. Dazu zerlegen wir die Identität 1.1.3 in zwei Teile:

1.1.11 $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} u'_\nu w^\nu \; , \quad \sum_{n=0}^{\infty} u'_n w^n = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n .$$

Die linke Identität definiert eine Eulersche Reihentransformation ($\mathcal{E}$) von $\sum u_\nu$ in $\sum u'_\nu$, die rechte eine Nörlund-Transformation ($\mathcal{N}$) in RF-Form. Wie im Anschluß an 1.1.5 bereits gezeigt, bekommen wir $(U_n)$ auch rein algebraisch als Hintereinanderschaltung dieser beiden Transformationen.

Umgekehrt können wir den Euler- und den Nörlundteil eines (f,g)-Verfahrens als elementare Gronwall-Verfahren auffassen. Schreiben wir etwa $U'_n = \sum_{\nu=0}^{n} u'_\nu$ und berücksichtigen

$(1-w) \sum_{n=0}^{\infty} U'_n w^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} u'_\nu w^\nu$, dann zeigt der Vergleich von 1.1.11 mit 1.1.3, daß tatsächlich gilt

1.1.12 $\qquad \mathfrak{E} \mathrel{\hat{=}} (f, (1-w)^{-1}) \quad , \mathcal{N} \mathrel{\hat{=}} (\mathrm{id},\ g)$

Dabei müssen wir allerdings beachten, daß $\mathfrak{E}$ als Reihe-Reihe- und $(f, (1-w)^{-1})$ als Reihe-Folge-Transformation vorliegt. (Dies schafft jedoch keine Probleme, da nur zeilenfinite Matrizen beteiligt sind.) Dies berücksichtigend haben wir nach 1.1.11 für jedes Gronwall-Verfahren eine Darstellung

1.1.13 $\qquad (f, g) = (\mathrm{id}, g)\ (f, (1-w)^{-1})$

Spezielle Gronwall-Verfahren sind die Verfahren

$$C_\alpha \mathrel{\hat{=}} (\mathrm{id}, (1-w)^{-\alpha-1}) \quad , \qquad \alpha > -1$$

von Cesaro,

$$E_\vartheta \mathrel{\hat{=}} \left( \frac{\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w} , \ (1-w)^{-1} \right) , \qquad 0 < \vartheta \le 1$$

von Euler-Knopp,

$$V_{1/2} \mathrel{\hat{=}} \left( \frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}} , \ (1-w)^{-1/2} \right)$$

von de la Vallée-Poussin,

$$\Omega_1 \mathrel{\hat{=}} (1-(1-w)^{1/2} \ , \ (1-w)^{-1/2})$$

von Obrechkoff und

$$RP \mathrel{\hat{=}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n\ n!} w^n \ , \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} w^n \right)$$

von Rey Pastor.

Es wird sich zeigen, daß zwischen Gronwall-Verfahren und den verstärkten komplexen Abelschen Limitierungsverfahren starke Korrelationen bestehen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, führen wir die in dieser Arbeit benutzte Variante der Abel-Verfahren explizit ein (vgl. Zeller-Beekmann [22], S. 110 f). Dazu vereinbaren wir noch $\mathcal{W}(0,1)$ als die Menge aller rechts offenen einfachen Wege W in E von O nach 1 (Randpunkt 1). Sei nun $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$, $W \in \mathcal{W}(0,1)$.
Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ nennen wir $A^*(\theta,W)$-summierbar zur Summe s, dann und nur dann, wenn gilt

1.1.14 (i) $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ ist holomorph in $z = o$ und läßt sich längs W analytisch fortsetzen. Die zugehörige Fortsetzung sei $\Phi$ .

(ii) Es gibt ein $r > 0$, so daß $\Phi$ im Innern des Sektors[1) ] $S(\theta) \cap \Delta_r(1)$ holomorph ist.

(iii) Für jedes $\theta' < \theta$ geht $\Phi(z)$ gegen s, wenn $z \to 1$ in $S(\theta')$

Abweichend hiervon wollen wir unter der $A^*(W) = A^*(0,W)$-Summierbarkeit den Grenzwert lim $\Phi(z)$ für $z \to 1$ mit $z \in E \cap \mathbb{R}$ verstehen. (Statt (ii) verlangen wir nun Holomorphie für $z \in \,]1-r,1[$ ).
Wir benutzen oft die Schreibweise $A^*(\theta,W) - \sum u_\nu = s$, deren Bedeutung klar ist. Völlig analog sprechen wir gelegentlich auch von $A^*(\theta,W)$-Limitierbarkeit, einer Folge $(s_n)$ zum Wert s und schreiben $A^*(\theta,W)\text{-}\lim s_n = s$, wenn $(1-z)\sum_{n=o}^{\infty} s_n z^n = \Phi(z)$ (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Manchmal unterdrücken wir auch die Angabe des Weges W, z. B. dann, wenn klar ist, längs welchen Weges wir die analytische Fortsetzung $\Phi$ gewinnen oder, wenn $\sum u_\nu z^\nu$ in einem relevanten einfach zusammenhängenden Gebiet von vorneherein holomorph ist.

1) Zur genauen Definition siehe 1.1.15 .

Es sei an dieser Stelle betont, daß durch die gewählte Definition der $A^*(\theta)$-Summierbarkeit - im Gegensatz zu den üblicherweise benutzten verstärkten Abel-Verfahren - Singularitäten auf der Strecke $]0,1[$ nicht ausgeschlossen werden.

1.1.15 Bemerkung

Die Bezeichnungen dieses Abschnitts wollen wir hinfort beibehalten. So ist stets, wenn nichts Gegenteiliges verlautet,

$$z = f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n \ , \quad z^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^{(\nu)} w^n \ , \quad \nu \geq 0$$

$\lambda = \lambda_f$ die zu f gehörige Konstante laut 1.1.1(v),

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad \text{mit zugehörigem } \alpha > 0.$$

Koeffizienten mit negativen Indizes werden zu Null gesetzt. Ferner gilt immer

$$S(\theta) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\arg(1-\zeta)| \leq \theta,\ \zeta \neq 1\}$$

In Ausdrücken der Form $(1-w)^\delta$ meinen wir stets den Hauptwert.

Die Beweisenden kennzeichnen wir durch das Symbol "&".

Als Synonym zu "Gronwall-Verfahren" verwenden wir des öfteren die Bezeichnung "(f,g)-Verfahren" .

## 1.2 Der Nörlund-Teil

Wir lassen im folgenden eine größere Menge von Funktionen g zu als die unter 1.1.2 beschriebene. Über die durch die Eigenschaften

1.2.1 (i) $\gamma$ ist stetig in 1 und holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$

(ii) $\gamma(w) \neq 0$ für alle $w \in E \cup \{1\}$

festgelegte Funktionenklasse $\mathcal{H}$ definieren wir die Menge $\mathfrak{G}$ folgendermaßen:

$$(*) \qquad \mathfrak{G} := \{ g \mid \exists \alpha > 0, \gamma \in \mathcal{H}: g(w) = \gamma(w)(1-w)^{-\alpha}, b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^0 \}$$

Die Bedingung $b_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^0)$ führen wir nur aus Gründen der Bequemlichkeit ein. Wie wir gleich sehen werden, gilt nämlich ohnedies schon $b_n \neq 0$ für genügend große n. Um gemäß 1.1.3 zu einer befriedigenden Definition der (f,g)-Summe einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ zu kommen, müßten wir daher lediglich $U_n := 0$, falls $b_n = 0$, vereinbaren. Doch dies nur am Rande.

Zum Beweis des fundamentalen Lemmas 1.2.3 über das asymptotische Verhalten der $b_n$ benötigen wir eine Hilfsaussage, die wir indes nicht verifizieren, da sie sich unmittelbar aus dem allgemeineren Zusammenhang von Korollar 2.1.4 ergibt (es entsteht kein Ringschluß).
Fortan bezeichnen wir mit $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n$ die Potenzreihenentwicklung einer relevanten Funktion $\gamma$ im Nullpunkt.

1.2.2 Lemma

$\gamma$ erfüllt 1.2.1 (i) $\Longrightarrow$ $\forall \delta > -1: \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ ist $C_\delta$-summierbar.

1.2.3 Lemma

Für alle $g \in \mathfrak{G}$ gilt $b_n \approx \frac{\gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1}$

Beweis: Nach Definition von $\mathfrak{G}$ haben wir

$$b_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} \beta_\nu$$

worin $A_n^{(\alpha)}$ über $(1-w)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha-1}{n} w^n$ als

$A_n^{(\alpha)} := \binom{n+\alpha-1}{n}$ gegeben ist.

Vermöge

$$\begin{aligned} n^{1-\alpha} A_n^{(\alpha)} \Gamma(\alpha) &= n^{1-\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} \\ &= n^{1-\alpha} \frac{(n+\alpha)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} e^{1-\alpha+O(n^{-1})} \\ &= \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} e^{1-\alpha} \cdot e^{O(n^{-1})} \\ &= 1 + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

erhalten wir daher

$$\frac{b_n}{n^{\alpha-1}} = \frac{A_n^{(\alpha)}}{n^{\alpha-1}} \cdot \frac{b_n}{A_n^{(\alpha)}} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \gamma(1)$$

denn die Folge $\left(\frac{b_n}{A_n^{(\alpha)}}\right)$ ist gerade die $C_{\alpha-1}$ - Transformierte der Reihe $\sum \beta_n$ und somit nach Lemma 1.2.2 konvergent zum Wert $\gamma(1)$. &

In Abschnitt 2.2 werden wir sehen, daß die $\gamma \in \mathcal{H}$ beim Vergleich zweier Gronwall-Verfahren $(f, (1-w)^{-\alpha_1})$ und $(f, \gamma(w)\cdot(1-w)^{-\alpha_2})$ auf besonders einfache Resultate führen, falls $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Dies trifft jedoch nicht mehr zu, wenn wir $\alpha_2 = \alpha_1$ zulassen.

Bevor wir zu einer weiteren Definition kommen, betrachten wir einmal die folgenden Funktionen:

1.2.4 $\gamma$ ist stetig in 1 und für ein $R > 1$ holomorph auf $\overline{\Delta}_R(0) - [1,R]$

Wir können eine interessante Eigenschaft beweisen:

1.2.5 Lemma

$$\gamma \text{ genügt 1.2.4} \quad \Longrightarrow \quad \beta_n = o(n^{-1})$$

Beweis: Wir betrachten die den Nullpunkt umschließende Kurve $C_n := \sum_{\nu=0}^{5} C_n^{(\nu)}$ (siehe Fig. 1) mit

$$\begin{array}{lll}
C_n^{(1)}: & w = e^{it} & , \quad 0 \le t \le \varphi_n \\
C_n^{(2)}: & w = (1 + i \tan \varphi_n)\, x, & 1 \le x \le 1+h \\
C_n^{(3)}: & w = (1+h)e^{it} & , \quad \varphi_n \le t \le 2\pi - \varphi_n \\
C_n^{(4)}: & w = (1 - i \tan \varphi_n)\, x, & 1+h \ge x \ge 1 \\
C_n^{(5)}: & W = e^{it} & , \quad -\varphi_n \le t \le 0
\end{array}$$

- 13 -

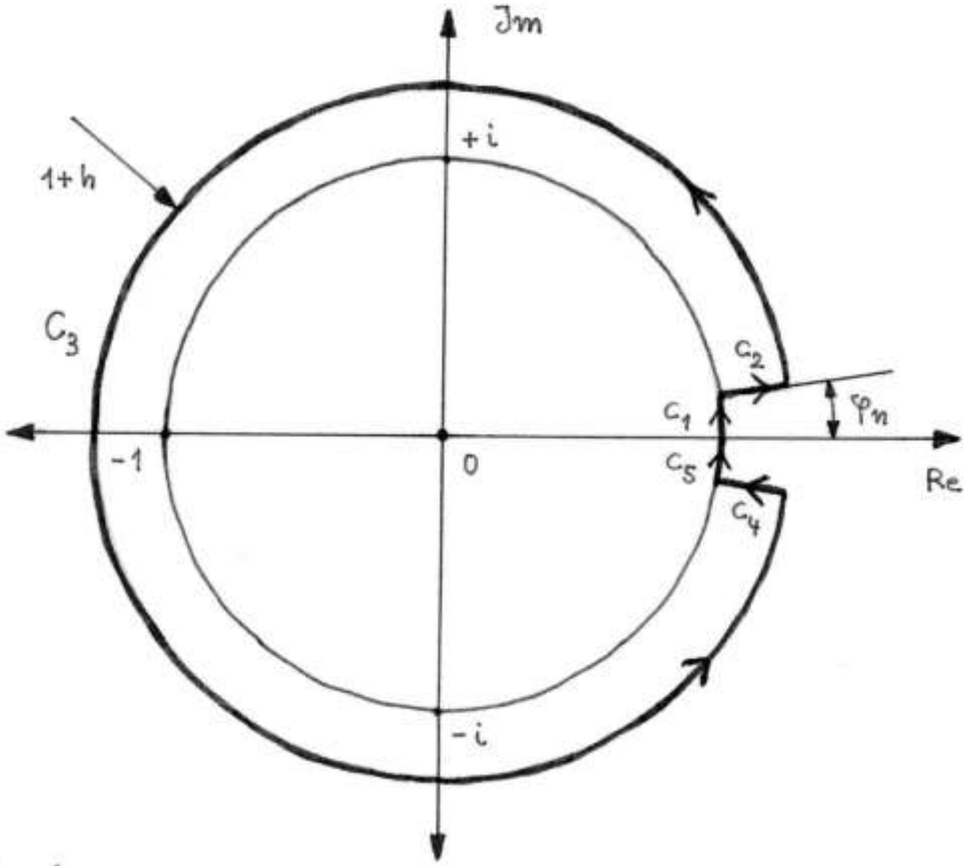


Fig. 1

Dabei sei $\varphi_n = 2^{-n}$ $(n \geq 0)$ und $h > 0$ aber $1 + h < R$ (mit $R > 1$ gemäß 1.2.4). Nach 1.2.4 ist $\gamma$ in einer genügend kleinen Umgebung von 1 beschränkt.
Für geeignet gewählte $h > 0$, $M < \infty$ ist daher

$$|\gamma(w)| < M \qquad \forall\ w \in \overline{\Delta}_{1+h}(0)$$

Nun haben wir

$$2\pi i\, \beta_n = \int_{C_n} \gamma(w)\, \frac{dw}{w^{n+1}} =: \sum_{\nu=0}^{5} I_\nu$$

Im einzelnen erhalten wir folgende Abschätzungen:

$$|I_1| = \left| \int_0^{\varphi_n} \gamma(e^{it}) \frac{i\,dt}{e^{nit}} \right|$$

$$\leq \int_0^{\varphi_n} |\gamma(e^{it})|\,dt < M\varphi_n$$

$$|I_2| = \left| \int_1^{1+h} \gamma((1+i\tan\varphi_n)x) \frac{dx}{(1+i\tan\varphi_n)^n x^{n+1}} \right|$$

$$\leq \int_1^{1+h} |\gamma((1+i\tan\varphi_n)x)|\,|\cos\varphi_n|^n \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$< M\,|\cos\varphi_n|^n \int_1^{1+h} \frac{dx}{x^{n+1}} < \frac{M}{n}$$

$$|I_3| = \left| \int_{\varphi_n}^{2\pi-\varphi_n} \gamma((1+h)e^{it}) \frac{i\,dt}{(1+h)^n e^{nit}} \right|$$

$$\leq \int_{\varphi_n}^{2\pi-\varphi_n} |\gamma((1+h)e^{it})| \frac{dt}{(1+h)^n}$$

$$< \frac{2\pi M}{(1+h)^n}$$

$$|I_4| < \frac{M}{n}$$

$$|I_5| < M\varphi_n$$

Wegen $h > 0$ und $\varphi_n = 2^{-n}$ gilt daher $\beta_n = O(n^{-1})$. &

Nach einem Satz von Hardy-Littlewood (Hardy [19], Theorem 45, S. 101) ist $\beta_n = O(n^{-1})$ zusammen mit der mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ hinreichend für die $C_\delta$ -Summierbarkeit ( $\delta > -1$) der betrachteten Reihe.

Bei der Behandlung von Inklusionen zwischen $(f, (1-w)^{-\alpha})$ und $(f, \gamma(1-w)^{-\alpha})$ werden wir gerade diese Eigenschaft - allerdings mit absoluter Konvergenz - benötigen. Daher setzen wir

1.2.6 (i) $\gamma$ ist stetig in 1 und für ein $R > 1$ holomorph $\Delta_R(0) - [1, R]$

(ii) $\gamma(w) \neq 0$ für alle $w \in E \cup \{1\}$

(iii) $\sum \beta_n$ ist absolut konvergent

und werden so auf eine Funktionenklasse $\mathcal{H}'' \subset \mathcal{H}$ geführt, welche ihrerseits einer analog zum obigen Vorgehen definierten Menge $\mathfrak{G}''$ zugrundeliegt. 1)

Die folgende Bemerkung wird sich gelegentlich als nützlich erweisen:

1.2.7 $(\mathcal{H}, \cdot)$ und $(\mathcal{H}'', \cdot)$ sind (multiplikative) Monoide

Bis auf die behauptete Abgeschlossenheit der Multiplikation in $\mathcal{H}''$ ist die Aussage trivial. Seien also $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}''$, dann sind die Reihen $\sum |\beta_n^{(1)}|$ und $\sum |\beta_n^{(2)}|$ $C_{-1/2}$-summierbar. Daher ist die über $\gamma := \gamma_1 \cdot \gamma_2$ definierte Reihe $\sum |\beta_n|$ konvergent und genügt 1.2.6 (i) und (ii); mithin $\gamma \in \mathcal{H}''$. &

1) Der Doppelstrich || soll auf die absolute Konvergenz der Reihe $\sum \beta_n$ hindeuten.

Wir charakterisieren nun noch eine Teilmenge $\mathcal{H}^*$ von $\mathcal{H}''$:

$$\gamma \in \mathcal{H}^* :\Longleftrightarrow \quad 1.2.8 \text{ (i) und (ii)}$$

1.2.8 (i) $\gamma$ ist holomorph auf $\overline{\Delta}_R(0) - [1,R]$ (für ein $R > 1$) und Hölder-stetig in 1 zu einem Exponenten $\delta > 0$ [1)]

(ii) $\gamma(w) \neq 0$ für alle $w \in \bar{E}$

Hie und da werden wir auch die Variante $\mathcal{H}_0^* \supset \mathcal{H}^*$ benutzen, welche wir in Abänderung von 1.2.8 (ii) durch Zulassen von Nullstellen auf $\partial E - \{1\}$ erhalten. [2)]

Wie wir in Lemma 1.2.10 zeigen werden, ist $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| < \infty$ für alle $\gamma \in \mathcal{H}_0^*$, also tatsächlich $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}_0^* \subset \mathcal{H}''$.

Das Produkt zweier Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}_0^*$ und das Inverse eines $\gamma \in \mathcal{H}^*$ sind offensichtlich wieder Hölder-stetig zu einem positiven Exponenten. Letzteres beweist man etwa so:

$$\frac{1}{\gamma(w)} - \frac{1}{\gamma(1)} = \frac{1}{\gamma(1) + O(|1-w|^{\delta})} - \frac{1}{\gamma(1)}$$

$$= \frac{O(|1-w|^{\delta})}{\gamma(1)^2 + O(|1-w|^{\delta})} = O(|1-w|^{\delta})$$

Nach einigen ganz elementaren Überlegungen folgt daher unter Berücksichtigung von 1.2.10:

1.2.9 $(\mathcal{H}_0^*, \cdot)$ ist ein Monoid mit der Einheitengruppe $(\mathcal{H}^*, \cdot)$

1) D. h. $\exists\, \delta > 0$: $\gamma(w) = \gamma(1) + O(|1-w|^{\delta})$ für $w \longrightarrow 1$; wir werden hierfür gelegentlich die Schreibweise "$H_\delta$-stetig in 1" benutzen.

2) $\mathcal{G}^*$ und $\mathcal{G}_0^*$ sind analog zu 1.2.1 (*) zu verstehen.

Wir kommen nun zu dem bereits angekündigten Lemma.

1.2.10 Lemma

$\gamma$ genügt 1.2.8 (i) $\Longrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0 : \quad \beta_n = o(n^{-1-\varepsilon})$

Beweis: Wir gehen zunächst genau wie im Beweis zu Lemma 1.2.5 vor. Diesmal schätzen wir jedoch die Summe der Integrale $I_2$ und $I_4$ ab:

$$
\begin{aligned}
|I_2 + I_4| &= \Bigg| \int_1^{1+h} \gamma((1+i\tan\varphi_n)x)\, \frac{dx}{(1+i\tan\varphi_n)^n x^{n+1}} \\
(1) \qquad &\qquad - \int_1^{1+h} \gamma((1-i\tan\varphi_n)x)\, \frac{dx}{(1-i\tan\varphi_n)^n x^{n+1}} \Bigg| \\
&= \Bigg| \int_1^{1+h} \Big\{ \gamma((1+i\tan\varphi_n)x) e^{-in\varphi_n} - \gamma((1-i\tan\varphi_n)x) e^{in\varphi_n} \Big\} \frac{\cos^n\varphi_n\, dx}{x^{n+1}} \Bigg|
\end{aligned}
$$

Da $\gamma$ Hölder-stetig ist zu einem Exponenten $\delta > 0$, können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
\gamma((1 \pm i\tan\varphi_n)x) &= \gamma(1 \pm i\tan\varphi_n) + O(|1 \pm i\tan\varphi_n|^\delta\, |1-x|^\delta) \\
(2) \qquad &= \gamma(1) + O(|\varphi_n|^\delta) + O(|1-x|^\delta)
\end{aligned}
$$

für $n \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow 1$.

Die geschweifte Klammer in (1) wird demnach zu

$$(3) \qquad -2i\,\gamma(1)\sin n\varphi_n + O(|\varphi_n|^\delta) + O(|1-x|^\delta)$$

Für genügend kleines $h > 0$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir daher mit geeigneten Konstanten $K_1, K_2 > 0$

$$|I_2 + I_4| < \int_1^{1+h} \left( |\gamma(1)| \sin n\varphi_n + K_1 \varphi_n^{\delta} + K_2 h^{\delta} \right) \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$< \left( |\gamma(1)|\, n \cdot 2^{-n} + K_1 2^{-\delta n} + K_2 h^{\delta} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , dann bekommen wir wegen $2^{-n} = o(n^{-1-\delta})$ und $2^{-\delta n} = o(n^{-\delta})$

(4) $\qquad I_2 + I_4 = o(n^{-1-\delta/2})$ sowie $|I_1| + |I_5| = o(n^{1-\delta})$

Ferner gilt $\quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \binom{n}{3} n^{-3/2}$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) n^{3/2} \geq \frac{n^{3/2}}{27} \quad (n \geq 3)$$

und daher für hinreichend großes $n$

$$|I_3| < 27 \cdot 2\pi M\, n^{-3/2}$$

Mit $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ und $\varepsilon \leq \frac{3}{2}$ haben wir folglich

$I = o(n^{-1-\varepsilon})$ bzw. $\beta_n = o(n^{-1-\varepsilon})$.

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ absolut konvergent. &

Es ist nun an der Zeit, die von Gronwall ursprünglich betrachteten Funktionen g einzuordnen. Nach 1.1.2 (i) haben wir $g(w) = \frac{1 + \gamma(w)(1-w)^{\alpha}}{(1-w)^{\alpha}}$ mit $\alpha > 0$ und $\gamma$ holomorph auf $\bar{E}$. Daher gilt sicher $1 + \gamma(w)(1-w)^{\alpha} \in \mathcal{H}_0^*$ , also $g \in \mathfrak{G}_0^*$ .

Der Vorteil der durch 1.2.1 (*) klassifizierten Funktionen g gegenüber den von Gronwall ausschließlich zugelassenen, liegt in den abgeschwächten Voraussetzungen und der - wie wir noch sehen werden - günstigeren Schreibweise.

Abschwächungen der Bedingungen 1.1.2 hat auch Amerio eingehend untersucht (vgl. [1] , S. 246 ff). Indes weisen seine Studien in eine mehr algebraische Richtung, ganz im Gegensatz zu den obigen funktionentheoretischen Überlegungen.

Im Abschnitt 2.1 werden wir die beiden folgenden Lemmata über $\gamma \in \mathcal{H}$ bzw. $g \in \mathcal{G}$ noch benötigen:

1.2.11 Lemma

Es gibt ein $M > 0$ und ein $\varrho_0 > 0$, so daß $|\gamma(w)| > M$ für alle $w \in \Delta_{\varrho_0}(1)$

Beweis: Nach 1.2.1 ist $\gamma$ stetig in 1 und $\gamma(1) \neq 0$. &

1.2.12 Lemma (Gronwall [11] , S. 105 f)

Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|\, |w|^n = O(|g(w)|)$ für $w \to 1$ in $S(\theta)$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Beweis: Lemma 1.2.3 zufolge haben wir $|b_n| < KA_n^{(\alpha)}$ (K geeignet)

also $$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\, |w^n| < K(1-|w|)^{-\alpha}$$

Nach Lemma 1.2.11 ist andererseits

$$|g(w)| > M\, |1-w|^{-\alpha} \quad \text{für } w \in S(\theta),\ |1-w| = \varrho \leq \varrho_0$$

Daher gilt für alle $w \in S(\theta)$, $|1-w| = \varrho \leq \varrho_0$

$$M\, |1-w|^{-\alpha} < |g(w)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\, |w^n| < K(1-|w|)^{-\alpha}$$

Nun haben wir aber für $\varrho \leq \cos\theta$

$$|w|^2 = 1 - 2\varrho\cos\theta + \varrho^2 \leq 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

und folglich

$$\frac{|1-w|}{1-|w|} \leq \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} < \frac{2}{\cos\theta}$$

Dies zieht die Behauptung unmittelbar nach sich :
Es ist

$$1 \leq \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n||w|^n}{|g(w)|} < \frac{K}{|g(w)|(1-|w|)^\alpha}$$

$$< \frac{K}{M}\left(\frac{|1-w|}{1-|w|}\right)^\alpha < \frac{K}{M}\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^\alpha$$

für alle $w \in S(\theta)$ , $|1-w| = \varrho \leq \tilde{\varrho}_0 < \varrho_0$ . &

Beim Beweis des Satzes 2.1.1 ist das vorstehende Lemma von ausschlaggebender Bedeutung.

## 1.3 Der Euler-Teil

Wir wollen die in der Einleitung angeführten Voraussetzungen über die Funktionen f jetzt einmal genauer betrachten. Der besseren Handhabbarkeit halber definieren wir die Menge $\mathfrak{F}$ durch

1.3.1 $\qquad f \in \mathfrak{F} \quad :\Longleftrightarrow \quad$ f erfüllt (i), (ii) und (iii)

wobei

(i) f ist biholomorph auf $\bar{E} - \{1\}$

(ii) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(E) \subset E$

(iii) $\exists\, \lambda \geq 1: \qquad \Psi(w) := \dfrac{1-f(w)}{(1-w)^{1/\lambda}}$ ist stetig in 1

und $\Psi(1) > 0$

Die Äquivalenz von (i) und (ii) mit den entsprechenden, eingangs formulierten Eigenschaften ist trivial.
(iii) bedarf einer Erläuterung. In 1.1.1 hatten wir gefordert: $\exists\ \lambda \geq 1$ und eine Potenzreihe $\Phi$ mit positivem Konvergenzradius, so daß (mit $z = f(w)$)

(✱) $\qquad 1-w = (1-z)^{\lambda}\, \Phi\,(1-z)$ und $\Phi(0) > 0$

Der Quotient $\dfrac{1-w}{(1-z)^{\lambda}} = \Phi\,(1-z)$ ist daher stetig in $z = 1$ und nimmt dort einen positiven Wert an. Folglich können wir auf 1.3.1 (iii) schließen. Wenn wir für eine gegebene Funktion f die Eigenschaft $f \in \mathfrak{F}$ nachweisen wollen, können wir uns also durchaus auf (✱) statt 1.3.1 (iii) berufen (denn es ist $\Psi(w) = 1/(\Phi(1-z))^{1/\lambda}$).

### 1.3.2 Bemerkung

Wir betonen, daß die in 1.3.1 (iii) definierte Funktion $\Psi = \Psi_f$ holomorph ist auf $\bar{E} - \{1\}$ mit $\Psi(w) \neq 0$ für alle $w \in \bar{E}$. Weiter ist f wegen

(1) $\qquad f(w) = 1-(1-w)^{1/\lambda}\, \Psi(w)$

Hölder-stetig zum Exponenten $1/\lambda$ in 1.

1.3.1 (*) zieht $\frac{1-w}{(1-z)^{\lambda}} = a_o + O(|1-z|)$ mit einem $a_o > 0$ nach sich. Daher können wir mit (1) auf (2) schließen:

$$(2) \qquad \Psi(w) = a_0^{-1/\lambda} + O(|1-w|^{1/\lambda^2}) \quad \text{für } w \to 1 .$$

Zwei Teilmengen von $\mathfrak{F}$ werden sich im weiteren Verlauf als besonders interessant erweisen:

$$\mathfrak{F}' := \{ f \in \mathfrak{F} \mid f \text{ genügt } 1.2.4 \}$$

$$\mathfrak{F}^* := \{ f \in \mathfrak{F}' \mid \Psi = \Psi_f \text{ ist für ein } \delta > 0 \ H_\delta\text{-stetig in } 1 \}$$

1.3.3 Bemerkung

Wegen Bemerkung 1.3.2 gilt $\frac{f}{id} \in \mathcal{H}^*$ für alle $f \in \mathfrak{F}'$. Außerdem ist für $f \in \mathfrak{F}^*$ auch $\Psi_f \in \mathcal{H}^*$, insbesondere also $\frac{1}{1-f(w)} = [\Psi_f(w)]^{-1}(1-w)^{-1/\lambda} \in \mathfrak{G}^*$.

Zur Klärung grundlegender Sachverhalte und zur Vorbereitung des Folgenden, formulieren und beweisen wir nun noch einen wichtigen Hilfssatz:

1.3.4 Lemma

$\sum u_\nu$ $(f,g)$-summierbar $\Rightarrow$ $\sum u_\nu z^\nu$ holomorph in $z = 0$.

Beweis: Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist die Potenzreihenentwicklung $\sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{c}_\nu z^\nu$ von $f^{-1}$ im Nullpunkt konvergent in $\Delta_\delta(0)$ und es gilt $f^{-1}(\Delta_\delta(0)) \subset E$. Wir betrachten nun die formale Identität 1.1.3 :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n , \quad z = f(w) .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(U_n)$ für $n \to \infty$. Lemma 1.2.3 zufolge gilt daher $b_n U_n = O(n^{\alpha-1})$, d. h., die Reihe $\sum b_n U_n w^n$ ist konvergent in E. Da g in E holomorph und $\neq 0$ ist, können wir $1/g$ im Nullpunkt in eine

Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k w^k$ mit Konvergenzradius 1 entwickeln.
Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n w^n := \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k w^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$ in E.
Wir haben also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n \left[ f^{-1}(z) \right]^n$$

und die hier rechts stehende Reihe konvergiert sicher für $z \in \Delta_\varrho(0)$. Daher ist auch die nach Potenzen von z umentwickelte Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{c}_\nu z^\nu \right)^n$ nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz konvergent in $\Delta_\varrho(0)$. &

Die formale Identität 1.1.3 besteht im Fall der (f,g)-Summierbarkeit also tatsächlich.

1.3.3 Bemerkung

Um im Folgenden Schreibarbeit zu sparen, wollen wir an dieser Stelle vereinbaren, die Buchstaben f und g ausschließlich für Funktionen aus $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G}$ zu verwenden.
Das Symbol $\Psi = \Psi_f$ reservieren wir für die gemäß 1.3.1 (iii) durch f bestimmte Funktion, während wir mit $\gamma$ die einem $g \in \mathfrak{G}$ zugeordnete Funktion aus $\mathcal{H}$ kennzeichnen (vgl. Abschnitt 1.2).
Dem Zeichen $\Phi$ ordnen wir keine feste Bedeutung zu. Meist gebrauchen wir $\Phi$ jedoch im Sinne einer holomorphen Fortsetzung eines relevanten Funktionselements in ein geeignetes Gebiet hinein.

# 2. VERGLEICH VON GRONWALL-VERFAHREN

## 2.1 Die klassischen Sätze

Wir beginnen jetzt mit der eigentlichen Theorie der Gronwall-Verfahren. Die Ergebnisse dieses Abschnitts gehen im wesentlichen auf Gronwall zurück.

2.1.1 Satz (Gronwall [11] , Theorem 1, S. 103)

Die Reihe $\sum u_\nu$ sei $(f,g)$-summierbar zur Summe s. Dann ist $\Phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ holomorph in $f(E)$ und $\sum u_\nu$ ist $A^*(\frac{\pi}{2\lambda}, W)$-summierbar zur Summe s, für jedes $W \in \mathcal{W}(0,1)$, $|W| \subset f(E)$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $U_n \longrightarrow s$ für die über die Identität

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

definierte Folge $(U_n)_{n \geq 0}$. Wegen $b_n = O(n^{\alpha-1})$ ist daher die rechte Seite von (1) konvergent im Einheitskreis. Der erste Teil des Satzes ist somit bewiesen. Sei $0 < \theta < \frac{\pi}{2\lambda}$; Punkte $z \in S(\theta)$ genügend nahe bei 1, werden mittels $f^{-1}$ in einem Sektor $S(\theta_0)$, $\lambda\theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ der w-Ebene abgebildet. O.B.d.A sei $s = 0$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es nun ein $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ mit $|U_n| < \delta$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Daher gilt für $w \in S(\theta_0)$

$$(2) \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n \right| < \sum_{n=0}^{N} |b_n U_n| |w|^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| \delta |w|^n$$

$$< \sum_{n=0}^{N} |b_n U_n| |w|^n + \delta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |w|^n$$

Nach den Lemmata 1.2.9 und 1.2.10 gibt es Konstanten $K, M, \varrho_0 > 0$, so daß für $w \in S(\theta_0)$ und $|1-w| = \varrho \leq \varrho_0$ gilt

(3) $$|g(w)| > \frac{1}{M\varrho^\alpha} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||w^n| < K\,|g(w)|$$

Folglich ist

4) $$\left| \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n u_n w^n \right| < M\varrho^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} |b_n u_n| + K \cdot \delta$$

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wählen wir nun zuerst $\delta < \frac{\varepsilon}{2K}$ und dann $\varrho_0 = \varrho_0(\varepsilon)$ so klein, daß $M\varrho^\alpha \sum_{n=0}^{N} |b_n u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann existiert ein $r_0 = r_0(\varrho_0) > 0$, so daß für alle $z \in S(\theta)$ mit $|1-z| = r \leq r_0$ gilt

(5) $$|\Phi(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit ist alles gezeigt. &

2.1.2 Bemerkung

Wegen des eben bewiesenen Satzes, ist eine Reihe $\sum u_n$ $(f,g)$-summierbar höchstens dann, wenn $\sum u_n z^n$ holomorph ist in $f(E)$. Nach einer Erweiterung des Koebeschen Verzerrungssatzes (Behnke - Sommer [18] , Satz 64/64a, S. 394) überdeckt $f(E)$ mindestens eine Kreisscheibe $\Delta_r(0)$ mit geeignetem $r \geq r_0 := \frac{1}{4}|f'(0)|$. Tatsächlich können wir $r > r_0$ wählen, weil die einzigen schlichten Funktionen $f$ für welche $f(E)$ keine größere Kreisscheibe (um Null) als $\Delta_{r_0}(0)$ enthält und die $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ erfüllen, nämlich die Funktionen

$$f(w) = \left(\frac{1+e^{it}}{1+e^{it}w}\right)^2 \cdot w\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

wegen $f(E) \not\subset E$ nicht aus $\mathfrak{F}$ sind.
Daher ist eine in $f(E)$ holomorphe Potenzreihe $\sum u_n z^n$ sicherlich konvergent in $\Delta_r(0)$ für eine $r > r_o$.
Entsprechendes gilt natürlich für $\sum s_n z^n$, wenn $s_n = \sum_{\nu=o}^{n} u_\nu$ gesetzt wird. Wir haben also: notwendig für die $(f,g)$-Summierbarkeit (bzw. -Limitierbarkeit) einer Reihe $\sum u_n$ (bzw. einer Folge $(s_n)$ ist

$$u_n = o\left(\left|\frac{4}{f'(0)}\right|^n\right), \quad s_n = o\left(\left|\frac{4}{f'(0)}\right|^n\right)$$

Der Beweis des folgenden Satzes wurde für den Fall $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ bereits von Gronwall erbracht. (vgl. Gronwall [11], Proof of Theorem 2, S. 107 f). Für den allgemeinen Fall $0 < \theta_o \leq \frac{\pi}{2}$ können wir Gronwalls Darstellung unter Berücksichtigung einer Korrektur von Bustoz - Wright ([9], S. 178 ff, insbesondere Theorem 1) im wesentlichen übernehmen. Explizit tritt dieser Satz - allerdings ohne Beweis - zuerst bei Birindelli auf (vgl. [4], S. 176).

2.1.3 Satz (Gronwall, Birindelli, Bustoz - Wright)

Sei $W \in \mathcal{W}(0,1)$ mit $|W| \subset f(E)$ sowie $\lambda\,\theta_o > \frac{\pi}{2}$.
Ist dann $\sum u_\nu z^\nu$ holomorph auf $f(\bar{E}) - \{1\}$ und gilt $A^*(\theta_o, W) - \sum u_\nu = s$, so ist die Reihe $\sum u_\nu$ zur selben Summe $(f,g)$-summierbar.

Beweis: Wir vereinbaren $\Phi(z) := \sum_{\nu=o}^{\infty} u_\nu z^\nu$. Es stellt keine Beschränkung dar $s = o$ anzunehmen; für $s \neq o$ können wir ja $\Phi(z) - s$ betrachten. Gemäß Voraussetzung gilt

(1) $\quad \Phi(z) = o(1)$ für $z \to 1$ in $S(\theta)$ mit $\frac{\pi}{2\lambda} < \theta < \theta_o$.

Wir wählen einen Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$ aber $\varphi > \pi - \lambda\theta$.
Dann ist $\frac{\pi - \varphi}{\lambda} < \theta$, so daß wegen $1-z = (1-w)^{1/\lambda}\,\Psi(w)$ sowie $\Psi(1) > 0$ und der Stetigkeit von $\Psi$ in 1 für $w \in S(\pi-\varphi)$ und $|1-w| = \varrho < \varrho_1$ ($\varrho_1$ genügend klein) $z \in S(\theta)$ ist mit $|1-z| = r < r_1$ ($r_1$ geeignet).

$\varrho_1$ machen wir nun noch so klein, daß $g \cdot \Phi \circ f$ im Innern von $C$ und auf $|C|$ holomorph ist wobei $C = C_1+C_2+C_3+C_4$ (siehe Fig. 2) mit

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \quad w = 1 - \varrho_0 e^{-it}, && -(\pi-\varphi) \le t \le \pi-\varphi \\
C_2 &: \quad w = 1 + \varrho e^{i\varphi}, && \varrho_0 \le \varrho \le \varrho_1 \\
C_3 &: \quad w = |1 + \varrho_1 e^{i\varphi}|\, e^{it}, && \arg(1+\varrho_1 e^{i\varphi}) \le t \le 2\pi - \arg(1+\varrho_1 e^{i\varphi}) \\
C_4 &: \quad w = 1 + \varrho e^{-i\varphi}, && \varrho_1 \ge \varrho \ge \varrho_0
\end{aligned}
$$

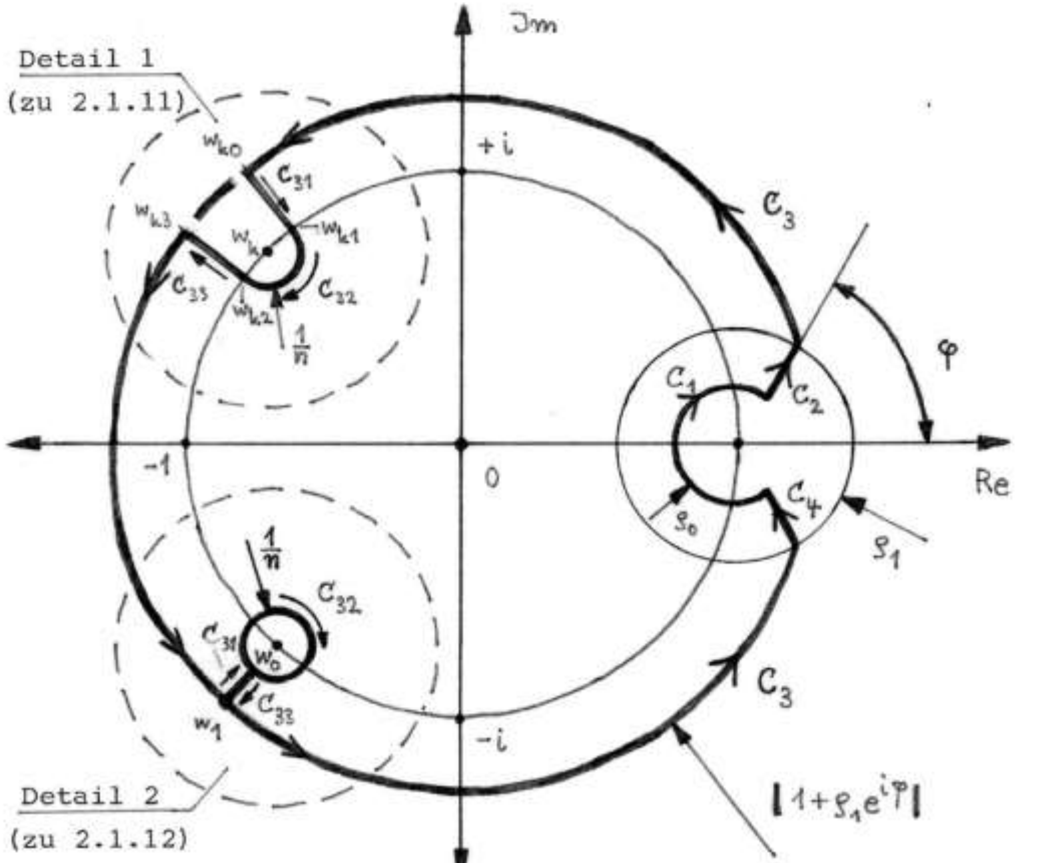


Fig. 2

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\varrho_1 = \varrho_1(\varepsilon) > 0$ und $M = M(\varrho_1) > 0$

mit $|\gamma(w) \cdot \Phi \circ f(w)| < \varepsilon$ für $w \in |C| - |C_3|$

und $|g(w) \cdot \Phi \circ f(w)| < M$ für $w \in |C_3|$

Nun können wir das Integral

abschätzen. Wir erhalten im einzelnen

$$|I_1| \leq \int_{-(\pi-\varphi)}^{\pi-\varphi} |\Phi \circ f(1-\varrho_0 e^{-it})| |\gamma(1-\varrho_0 e^{-it})| \frac{\varrho_0^{1-\alpha} \, dt}{|1-\varrho_0 e^{-it}|^{n+1}}$$

$$< \frac{2\pi \varepsilon \varrho_0^{1-\alpha}}{(1-\varrho_0)^{n+1}}$$

$$|I_2| < \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varepsilon \varrho^{-\alpha} \frac{d\varrho}{|1+\varrho e^{i\varphi}|^{n+1}}$$

$$< \varepsilon \cdot \varrho_0^{-\alpha} \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{d\varrho}{(1+2\varrho \cos\varphi)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot \varrho_0^{-\alpha}}{(n-1)(1+2\varrho_0 \cos\varphi)^{\frac{n-1}{2}} \cos\varphi}$$

(desgleichen $I_4$ )

$$|I_3| < \int_0^{2\pi} M \frac{dt}{|1+\varrho_1 e^{i\varphi}|^n}$$

$$= \frac{2\pi M}{|1+\varrho_1 e^{i\varphi}|^n}$$

Setzen wir $\rho_o = \frac{1}{n}$ für genügend große n, so folgt daher

$$I_1 = \varepsilon\, O(n^{\alpha-1}),\ I_2 = \varepsilon\, O(n^{\alpha-1}),\ I_3 = O(n^{-1}),\ I_4 = \varepsilon\, O(n^{\alpha-1})$$

Aufgrund von $b_n^{-1} = O(n^{1-\alpha})$ also

$$U_n = o(1) \text{ für } n \longrightarrow \infty. \quad \&$$

Für in 1 stetiges $\Phi$ haben wir in obigem Beweis anstelle von (1) $\Phi(z) = o(1)$ für $z \longrightarrow 1$. Daher können wir dort $\theta = \pi$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ setzen.

Wir formulieren den daraus fließenden Sachverhalt im Sinne des letzten Satzes als Folgerung.

2.1.4 Korollar

Sei $g\cdot\Phi\circ f$ holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$ und $\Phi$ stetig in 1. Dann gilt $(f,g)-\sum\limits_{\nu=o}^{\infty} u_\nu = \Phi(1)$

Im Spezialfall $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ geht der Beweis des nächsten Satzes auf Bustoz - Wright (vgl. [9] , Theorem 3, S. 180) zurück. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis zu Satz 2.1.3.

2.1.5 Satz (Bustoz - Wright)

Sei $g\cdot\Phi\circ f$ bis auf endlich viele Polstellen $w_k \in \partial E-\{1\}$, $1 \leq k \leq m$, holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$. Ferner sei $\Phi$ stetig in 1 oder $\sum u_\nu$ $A^*(\theta_o)$-summierbar zur Summe s und $\lambda\cdot\theta_o > \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\sum u_\nu$ $(f,g)$-summierbar (und zwar zur selben Summe $\Phi(1)$ bzw. s) genau dann, wenn $\alpha > p := \max\limits_{1\leq k\leq m} p_k$ (wobei $p_k$ = Polstellenordnung von $g\cdot\Phi\circ f$ in $w_k$, $1 \leq k \leq m$)[1)]

Beweis: Wir können längs derselben Kurve C wie im Beweis zu Satz 2.1.3 integrieren; allerdings erhalten wir jetzt

1) Mit Bustoz - Wright beschränken wir uns auf ganzzahlige Polstellenordnungen

$$(1) \qquad 2\pi i\, b_n U_n + 2\pi i \sum_{k=1}^{m} R_n^{(k)} = \int_C \Phi\circ f(w)\, g(w) \frac{dw}{w^{n+1}}$$

Die Residuen der Integranden an den Stellen $w_k$ berechnen wir aus

$$R_n^{(k)} = \int_{\partial\Delta_{\frac{1}{n}}(w_k)} \Phi\circ f(w)\; g(w)\; (w-w_k)^{\rho_k}\, w^{-n-1} \frac{dw}{(w-w_k)^{\rho_k}}$$

Für $w \in \partial\Delta_{\frac{1}{n}}(w_k)$ haben wir $w = w_k + \frac{1}{n} e^{-it}$ und somit

$$w^{-n-1} = w_k^{-n-1} \left(1 + \frac{\overline{w}_k e^{-it}}{n}\right)^{-n-1} = w_k^{-n-1} e^{\overline{w}_k e^{-it}} + o(1)$$

Weiterhin ergibt sich

$$\Phi\circ f(w)\, g(w)\, (w-w_k)^{\rho_k} w^{-n-1} = r_k w_k^{-n-1} e^{\overline{w}_k e^{-it}} + o(1)$$

mit $r_k \neq 0$, und demnach

$$R_n^{(k)} = \int_0^{2\pi} \left[ r_k w_k^{-n-1} e^{\overline{w}_k e^{-it}} + o(1) \right] \frac{\frac{(-i)}{n} e^{-it} dt}{\left(\frac{e^{-it}}{n}\right)^{\rho_k}}$$

$$= r_k w_k^{-n-1} n^{\rho_k - 1} \left[ \int_0^{2\pi} (-i) e^{\overline{w}_k e^{-it} + i(\rho_k-1)t} dt + \int_0^{2\pi} o(1)\, e^{i(\rho_k-1)t} dt \right]$$

Der Realteil des ersten Integranden ist $e^{-\cos(t-\varphi_k)} + \cos((\rho_k-1)t + \sin(t-\varphi_k))$ wobei $\varphi_k := \arg w_k$. Eine Abschätzung ergibt

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos((\rho_k-1)t+\sin(t-\varphi_k))\, dt \right| < 2\pi \quad \text{und} \quad \left| \int_0^{2\pi} e^{-\cos(t-\varphi_k)}\, dt \right| > \left(2+\frac{1}{4}\right)\pi .$$

Daher gibt es ein $r_k' \neq 0$ mit

$$R_n^{(k)} = r_k r_k' w_k^{-n-1} n^{\rho_k - 1} + o(n^{\rho_k-1})$$

Wir haben also

$$R_n := \sum_{k=1}^{m} R_n^{(k)} = \Big[ \sum_{\substack{k=1 \\ \rho_k = \rho}}^{m} r_k r_k' w_k^{-n-1} + o(1) \Big] n^{\rho-1} = \left(\tilde{r}_n + o(1)\right) n^{\rho-1}$$

mit $|\tilde{r}_n| > \tilde{r} > 0$ für hinreichend große n. Wegen Lemma 1.2.3 und Satz 2.1.3 können wir nun aus (1) folgern

$$U_n = \tilde{r}_n \frac{\Gamma(\alpha)}{\gamma(1)} n^{\rho-\alpha} + o(n^{\rho-\alpha}) \quad \text{für} \quad n \to \infty . \quad \&$$

Eine wichtige Anwendung der Sätze 2.1.1 und 2.1.3 ist im folgenden, von Gronwall stammenden, Satz fixiert. Gronwall beweist diesen Satz auf der Grundlage des nachstehend formulierten Korollars 2.1.7 - das ist im wesentlichen der in den einleitenden Bemerkungen zu Satz 2.1.3 angesprochene Fall $\Theta_o = \frac{\pi}{2}$ -, das er auf direktem Wege verifiziert (s. auch Bustoz - Wright [9], Theorem 1, S. 179). Da wir den Satz 2.1.3 zur Verfügung haben, können wir umgekehrt vorgehen und zuerst die allgemeinere Aussage 2.1.6 beweisen. Der induktiven Darstellung Gronwalls stellen wir also eine Deduktion gegenüber. Trotz der Erweiterung (Satz 2.1.3) haben wir im Vergleich zu Gronwall insgesamt einen kürzeren Beweis für die beiden "Hauptsätze" über (f,g)-Verfahren.

2.1.6 Satz (Gronwall [11], Theorem 3, S. 103)

Die Reihe $\sum u_\nu$ sei $(f_1,g_1)$-summierbar zur Summe s. Ist dann $f_2(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1(E)$ und $\lambda_2 > \lambda_1$ so gilt auch $(f_2,g_2) - \sum u_\nu = s$.

Beweis: Sei $\Phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$. $\Phi$ ist holomorph in $f_1(E)$, also insbesondere holomorph auf $f_2(\bar{E}) - \{1\}$. Weiter ist $\sum u_\nu$ $A^*(\frac{\pi}{2\lambda_1}, W)$-summierbar zur Summe s für jedes $W \in \mathcal{W}(0,1)$, $|W| \subset f_2(E)$ aufgrund von Satz 2.1.1. Mit $\Theta_o := \frac{\pi}{2\lambda_1}$ haben wir $\lambda_2 \cdot \Theta_o > \frac{\pi}{2}$ und folglich $(f_2,g_2) - \sum u_\nu = s$ wegen Satz 2.1.3. &

Einen Spezialfall dieses Satzes von besonderem Interesse formulieren wir als Folgerung:

2.1.7 Korollar (Gronwall [11] , Theorem 2, S. 103)

Die Reihe $\sum u_\nu$ sei $C_k$-summierbar mit der Summe s $(k > -1)$. Dann ist $\sum u_\nu$ auch (f,g)-summierbar (zur selben Summe), falls $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$ und $\lambda > 1$.

Darin ist insbesondere die Permanenz der Gronwall-Verfahren (f,g) mit $f(\bar{E})-\{1\} \subset E$ und $\lambda > 1$ enthalten.

Die Aussage des Korollars gilt nicht mehr, wenn

2.1.8 (i) $f(\bar{E}) \cap \partial E - \{1\} \neq \emptyset$ oder

(ii) $\lambda = 1$

zu (i): Sei $z_o \in f(\bar{E}) \cap \partial E$, $z_o \neq 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=o}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} z_o^{-n}$ $C_k$-summierbar falls $k > p-1$, aber für $\alpha \leq p$ nicht (f,g)-summierbar (vgl. Satz 2.1.5). &

zu (ii): Für die durch

$$a_n := \begin{cases} -(-1)^k, & n = k^2 > o \\ o, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Reihe $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ hat Knopp gezeigt: $\sum a_n$ ist $C_1$-summierbar, aber für kein $0 < \vartheta \leq 1$ durch ein Euler-Knoppsches Verfahren $E_\vartheta$ - limitierbar (s. [12], § 5, S. 253 ff). Da diese spezielle (f,g)-Verfahren mit $\lambda = 1$ sind, ist alles gezeigt. &

2.1.9 Bemerkung

Mit Blick auf unsere Ausführungen in Abschnitt 1.2 knüpfen wir jetzt nocheinmal an Korollar 2.1.4 an. Dieses hat nämlich eine beachtenswerte Konsequenz:

$$\Phi(z) := \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \text{ holomorph auf } \bar{E}-\{1\} \text{ und stetig in } 1$$
$$\Longrightarrow \quad \text{für jedes } \delta > -1 \text{ ist } \sum_{n=o}^{\infty} a_n \ C_\delta \text{ - summierbar.}$$

Daher haben wir jetzt das Lemma 1.2.2 bewiesen.

2.1.10 Bemerkung

Wegen 2.1.9 konvergieren die Potenzreihenentwicklungen von f und dessen Potenzen $f^\nu$ $(\nu \in \mathbb{N})$ in 1 für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

Überdies erhalten wir $c_n^{(\nu)} = o(n^{-1+\delta})$ für alle $\delta > 0$ und jedes $\nu \in \mathbb{N}$.
Für alle $f \in \mathfrak{F}$ ergibt sich ferner $[\Psi_f]^{-1} \in \mathcal{H}$; folglich ist stets $\dfrac{1}{1-f(w)} = (\Psi_f(w))^{-1}(1-w)^{-1/\lambda} \in \mathfrak{G}$.

2.1.11 Bemerkung

Die Sätze 2.1.3 und 2.1.5 (hier nur ein Teilaspekt), können wir noch in eine erweiterte Form bringen.
Seien $T_w := \{\tau w \mid \tau \geq 1\}$, $\sum u_\nu$ irgendeine Reihe und $\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$. In der Situation von Satz 2.1.3 ersetzen wir die Bedingung " $\Phi$ holomorph auf $f(\bar{E}) - \{1\}$ " durch

(i) Es gibt $m\ (\geq 0)$ Punkte $w_k \in \partial E - \{1\}$, $1 \leq k \leq m$, so daß $g \cdot \Phi \circ f$ holomorph ist auf $\bar{E} - \{1, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

(ii) $\exists\ r > 0: \forall\ k \in \mathbb{N}_m$: $g \cdot \Phi$ of ist holomorph in $\Delta_r(w_k) - T_{w_k}$

(iii) $\exists\ p \geq 0: \forall\ k \in \mathbb{N}_m$: $(w_k - w)^p\, g(w) \cdot \Phi\, \mathrm{of}(w) = O(1)$ für $w \longrightarrow w_k$

und behaupten: $(f,g) - \sum u_\nu = s$, wenn $\alpha > p$. Um dies zu zeigen, müssen wir den Beweis zu Satz 2.1.3 modifizieren (Wir beschränken uns auf das Wesentliche): Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ schlagen wir um die Punkte $w_k$ Kreise $\Delta_{\frac{1}{n}}(w_k)$. Die gegenseitigen Schnittpunkte der Kreisränder $\partial E$ und $\partial \Delta_{\frac{1}{n}}(w_k)$ bezeichnen wir mit $w_{k1}^{(n)}$ und $w_{k2}^{(n)}$. Sodann betrachten wir die "Geraden" $T_{kl}^{(n)} := T_{w_{kl}}$, $l = 1, 2$, und bezeichnen deren Schnittpunkte mit $C_3$ mit $w_{ko}^{(n)}$ bzw. $w_{k3}^{(n)}$. In offensichtlicher Weise werden nun Kurven $C_{3l}^{(n)}$ von $w_{k,l-1}^{(n)}$ nach $w_{kl}^{(n)}$ definiert (s. Fig. 2, Detail 1):

$$C_{31,k}^{(n)}: \quad w = \tau w_{k1}, \quad 1+h := |1+\varrho_1 e^{i\varphi}| \geq \tau \geq 1$$

$$C_{32,k}^{(n)}: \qquad w = w_k + \frac{1}{n} e^{it}, \qquad t_1^{(n)} \le t \le t_2^{(n)}$$

$$C_{33,k}^{(n)}: \qquad w = \tau w_{k2}, \qquad 1 \le \tau \le 1+h$$

Die Integrationskurve $C$ trennen wir an den Stellen $w_{kl}^{(n)}$, $l = 0,3$ auf und fügen die Kurven $C_{31,k}^{(n)} + C_{32,k}^{(n)} + C_{33,k}^{(n)}$ ein. Die Teilkurven $C_1$, $C_2$ und $C_4$, und die zugeordneten Integralabschätzungen brauchen nicht verändert zu werden. Auch die Abschätzung für $I_3$ wird nicht tangiert. Für die Integrale $I_{31,k}^{(n)}$ erhalten wir

$$|I_{31,k}^{(n)}| = \left| \int_1^{1+h} g(\tau w_{k1}^{(n)}) \cdot \Phi \circ f(\tau w_{k1}^{(n)}) \cdot (w_k - \tau w_{k1}^{(n)})^p \frac{w_{k1}^{(n)}\, d\tau}{(w_k - w_{k1}^{(n)})^p (\tau w_{k1}^{(n)})^{n+1}} \right|$$

(1) $$= O(\varrho_1) \cdot \int_1^{1+h} \frac{d\tau}{|w_k - \tau w_{k1}^{(n)}|^p \, \tau^{n+1}} \quad \text{für} \quad \varrho_1 \to 0$$

$$= O(\varrho_1) \cdot \int_1^{1+h} \frac{d\tau}{\left(\frac{1}{n}\right)^p \tau^{n+1}} = O(\varrho_1) \cdot O(n^{p-1}) \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty;$$

desgleichen $I_{33,k}^{(n)}$. Ferner haben wir

(2) $$|I_{32,k}^{(n)}| = \left| \int_{t_1^{(n)}}^{t_2^{(n)}} g(w_k + \tfrac{1}{n} e^{it}) \cdot \Phi \circ f(w_k + \tfrac{1}{n} e^{it}) (\tfrac{1}{n} e^{it})^p \frac{\frac{1}{n} i e^{it}\, dt}{(\frac{1}{n} e^{it})^p (w_k + \frac{1}{n} e^{it})^{n+1}} \right|$$

$$= O(1) \cdot n^{p-1} \int_{t_1^{(n)}}^{t_2^{(n)}} \frac{dt}{|w_k|^{n+1} \left(1 + \frac{\bar{w}_k e^{it}}{n}\right)^{n+1}} = O(n^{p-1})$$

Wie im Beweis zu Satz 2.1.5, folgt jetzt die Behauptung. &

Nach dem eben Gezeigten, sind die Reihen $\sum \binom{n+p-1}{n} \zeta^n$, $\frac{1}{\zeta} \in f(\partial E) - \{1\}$, (f,g)-summierbar, wenn $\alpha > p$. Für $p \notin \mathbb{Z}$ hätten wir dies aus den Sätzen 2.1.3 und 2.1.5 nicht folgern können. Deshalb haben wir eine echte Erweiterung der genannten Sätze bewiesen.
Auch die folgende Aussage ist nur für ganzzahlige $p$ in Satz 2.1.5 enthalten.
Im Anschluß an die letzte Bemerkung untersuchen wir die (f,g)-Summierbarkeit einer speziellen Reihe noch etwas genauer.

2.1.12 Bemerkung

Sei $\frac{1}{\zeta} \in f(\partial E) - \{1\}$ und $g \circ f^{-1}(\frac{1}{\zeta}) \neq 0$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} \zeta^n$, $p > 0$, ist genau dann (f,g)-summierbar, wenn $\alpha > p$.

Beweis: Sei $z_0 := \frac{1}{\zeta}$, $w_0 = f^{-1}(z_0)$. $\Phi \circ f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} \zeta^n [f(w)]^n$ hat einen "Pol" der Ordnung $p$ in $w_0 \in \partial E - \{1\}$. Wir gehen ähnlich wie in Bemerkung 2.1.11 vor. Den Integrationsweg C aus dem Beweis zu Satz 2.1.3 trennen wir an der Stelle $w_1$, dem Schnittpunkt von $C_3$ mit der Geraden $T_{w_0}$, auf, und fügen den Weg $C_{31} + C_{32} + C_{33}$ ein (s. Fig. 2, Detail 2), wobei

$$C_{31} \;:\; w = w_0 \cdot \tau \,, \qquad 1+h \geq \tau \geq 1 + \frac{1}{n}$$

$$C_{32} \;:\; w = w_0 + \frac{1}{h} e^{-it}, \qquad -\varphi_0 \leq t \leq 2\pi - \varphi_0 \,,\ \varphi_0 = \arg w_0$$

$$C_{33} \;:\; w = w_0 \cdot \tau \,, \qquad 1 + \frac{1}{n} \leq \tau \leq 1 + h$$

Für das $C_{32}$ zugeordnete Integral erhalten wir (s. Beweis zu Satz 2.1.5)

$$(1) \qquad I_{32} = \int_{\partial \Delta_{\frac{1}{n}}(w_0)} \frac{g(w)}{(1 - \zeta f(w))^p} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

- 33c -

$$= \int_{\partial\Delta_{\frac{1}{n}}(w_0)} z_0^p\, g(w) \left(\frac{w_0 - w}{z_0 - f(w)}\right)^p w^{-n-1} \frac{dw}{(w_0 - w)^p}$$

$$= z_0^p \left[f'(w_0)\right]^{-p} g(w_0)\, w_0^{-n-1} e^{i\frac{\pi}{2}p}\, n^{p-1} .$$

$$\cdot \left[\int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} e^{i(p-1)t - \bar{w}_0 e^{-it}} (-i)\, dt + \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} o(1)\, e^{i(p-1)t}\, dt\right]$$

für $n \longrightarrow \infty$

Wie im Beweis zu 2.1.4

gezeigt, gibt es ein $r_2 \in \mathbb{C}$ (unter 2.1.5 $r_k'$ genannt), $|r_2| > \frac{\pi}{4}$ , so daß

(2) $$I_{32} = z_0^p \left[f'(w_0)\right]^{-p} g(w_0)\, r_2\, w_0^{-n-1} e^{ip\frac{\pi}{2}} \cdot n^{p-1} + o(n^{p-1})$$

Die beiden restlichen Integrale berechnen wir folgendermaßen:

$$I_{31} = e^{ip\frac{\pi}{2}} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+h} z_0^p\, g(w_0\tau) \left(\frac{w_0 - w_0\tau}{z_0 - f(w_0\tau)}\right)^p (w_0\tau)^{-n-1} \frac{w_0\, d\tau}{(w_0\tau - w_0)^p}$$

(3) $$= z_0^p \left[f'(w_0)\right]^{-p} g(w_0)\, w_0^{-n-1} e^{ip\frac{\pi}{2}} .$$

$$\cdot \left[\int_{\frac{1}{n}}^{h} w_0^{1-p} \frac{d\tau}{\tau^p (1+\tau)^{n+1}} + \int_{\frac{1}{n}}^{h} o(1) \frac{d\tau}{\tau^p (1+\tau)^{n+1}}\right]$$

Das erste geklammerte Integral bezeichnen wir $r_1$ .

Es gilt

$$0 < n^{1-p} \int_{\frac{1}{n}}^{h} \frac{d\tau}{\tau^p (1+\tau)^{n+1}} < n \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} < \frac{3}{8}$$

für genügend große n.

- 33d -

Insgesamt ergibt sich ($I_{33}$ berechnet sich analog zu $I_{31}$):

$$(4) \qquad I_{31} + I_{32} + I_{33} = z_0^p \left[ f'(w_0) \right]^{-p} g(w_0) e^{ip\frac{\pi}{2}} w_0^{-n-1} \cdot$$

$$\cdot \left( r_1 + r_2 + e^{ip \cdot 2\pi} \cdot r_3 \right) n^{p-1} + o(n^{p-1})$$

Dabei ist $|r_1 + e^{i2\pi p} \cdot r_3| \leq |r_1| + |r_3| < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < |r_2|$, also $r_1 + r_2 + r_3 \neq 0$. Demnach ist $n^{p-1}$ die genaue Wachstumsordnung der drei Integrale für $n \longrightarrow \infty$. Unter Berücksichtigung der unveränderten Abschätzungen des Beweises von Satz 2.1.3, folgt deshalb die Behauptung auf die gleiche Weise wie im Beweis zu Satz 2.1.5. &

Wenn wir zulassen, daß $g$ in $w_0$ verschwindet, etwa von m-ter Ordnung, dann ergibt sich statt (4), mit fast wörtlich gleichem Beweisgang, falls $p - m > 0$,

$$I_{31} + I_{32} + I_{33} = z_0^p \left[ f'(w_0) \right]^{-p} g^{(m)}(w_0) e^{i(p-m)\frac{\pi}{2}} w_0^{-n-1} \cdot$$

$$\cdot \left( r_1 + r_2 + e^{i(p-m) \cdot 2\pi} \cdot r_3 \right) n^{p-m-1} + o(n^{p-m-1})$$

Für $p - m \leq 0$ ist $I_{31} + I_{32} + I_{33} = o(n^{-1})$.
Daher ist jetzt $\alpha + m > p$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die $(f,g)$-Summierbarkeit der betrachteten Reihe.

## 2.2 Inklusionsbeziehungen bei gleicher f-Komponente

Nachdem wir im letzten Abschnitt Gronwall-Verfahren $(f_1, g_1)$ und $(f_2, g_2)$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ miteinander verglichen haben, geht es uns nun darum, Inklusionsbeziehungen der Art $(f, g_1) \subset (f, g_2)$ zu verifizieren. Wegen der Darstellung $(f,g) = (id,g)(f,(1-w)^{-1}$ erwartet man, daß die Nörlund-Komponenten der in Rede stehenden Verfahren entscheidend sind. In der Tat sind die Vergleichssätze dieses Abschnitts im Kern Aussagen über gewisse Nörlund-Mittel.
Erste Ergebnisse über diesen Problemkreis gehen auf Birindelli [4] zurück. Neben einem bedeutenderen Resultat (s.w.u.) behandelt er den Spezialfall $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$, $g_2(w) = (1-w)^{-\alpha_2}$, mit $\alpha_2 > \alpha_1$ (vgl. Birindelli [4], S. 172), welcher indessen im Kontext des folgenden Satzes trivial ist.

### 2.2.1 Satz

Seien $g_1(w) = \gamma_1(w)(1-w)^{-\alpha_1}$, $g_2(w) = \gamma_2(w)(1-w)^{-\alpha_2}$ $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n := \gamma_2(w)/\gamma_1(w)$ für $w = 1$ $C_{\alpha_2-\alpha_1-1}$-summierbar ist, dann gilt

$$(f, g_1) \subset (f, g_2)$$

Beweis: Sei $(f, g_1)-\sum u_\nu = s$, also $U_n \longrightarrow s$ für die über

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g_1(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n w^n$$

definierte Folge $(U_n)_{n \geq 0}$. Die $(f, g_2)$-Transformierte der Reihe $\sum u_\nu$ sei $(V_n)_{n \geq 0}$. Somit haben wir

(2) $$\frac{\gamma_2(w)}{\gamma_1(w)}\,(1-w)^{\alpha_1-\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} V_n w^n$$ und daher

(3) $$b_n^{(2)} V_n = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{b}_{n-\nu}\, b_\nu^{(1)} U_\nu$$ wobei

(4) $$\tilde{b}_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha_2-\alpha_1)} \beta_\nu$$

Aufgrund der Voraussetzung über die Reihe $\sum \beta_n$ gilt

(5) $$\frac{\tilde{b}_n}{A_n^{(\alpha_2-\alpha_1)}} \longrightarrow \frac{\gamma_2(1)}{\gamma_1(1)} \quad \text{für } n \longrightarrow \infty$$

Wir müssen die Permanenz der durch (3) gegebenen unteren Dreiecksmatrix $(a_{n\nu})$ (wobei $a_{n\nu} := \frac{\tilde{b}_{n-\nu}\, b_\nu^{(1)}}{b_n^{(2)}}$, $0 \leq \nu \leq n$ ) verifizieren.
Für $(U_n) \equiv (1)$ ist auch $(V_n) \equiv (1)$; daher gilt für alle n die Formel $\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = 1$. Ferner ist $\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0$ $(\forall \nu \geq 0)$ wegen $\tilde{b}_{n-\nu} = O(n^{\alpha_2-\alpha_1-1})$ und $(b_n^{(2)})^{-1} = O(n^{1-\alpha_2})$. Schließlich finden wir mit den für alle $n > N$ gültigen Ungleichungen.

$|\tilde{b}_n| \leq K\, A_n^{(\alpha_2-\alpha_1)}$ $\quad |b_n^{(1)}| \leq K_1 A_n^{(\alpha_1)}$ , $|b_n^{(2)}| \geq K_2 A_n^{(\alpha_2)}$

(geeignete Konstanten K, $K_1$, $K_2$, N gibt es stets) für $n > 2N$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| &= \sum_{\nu=0}^{N} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu=N+1}^{n-N-1} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu=n-N}^{n} |a_{n\nu}| \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{N} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu=N+1}^{n-N-1} \frac{KK_1}{K_2}\,\frac{A_{n-\nu}^{(\alpha_2-\alpha_1)} A_\nu^{(\alpha_1)}}{A_n^{(\alpha_2)}} + \sum_{\nu=n-N}^{n} |a_{n\nu}| \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{N} \left(|a_{n\nu}| + |a_{n,n-\nu}|\right) + \frac{KK_1}{K_2}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha_2-\alpha_1)} A_\nu^{(\alpha_1)}}{A_n^{(\alpha_2)}} \\
&= o(1) + \frac{KK_1}{K_2}
\end{aligned}$$

(denn für alle $\nu \in \mathbb{N}^0$ gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_{n,n-\nu} = 0$).
Damit haben wir alles gezeigt. &

(denn für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt auch $\lim a_{n,n-\nu} = 0$).
Damit haben wir alles gezeigt. &

Wir notieren eine Folgerung

2.2.2 Korollar

Sei p die maximale Polstellenordnung von $\gamma_2/\gamma_1$ auf $\partial E$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}$. Dann gilt $(f,g_1) \subset (f,g_2)$, falls $\alpha_2 - \alpha_1 > p \geq 0$.

Beweis: $\gamma_2/\gamma_1$ ist stetig in 1. Nach Satz 2.1.5 ist daher $\sum \beta_n$ genau dann $C_{\alpha_2-\alpha_1-1}$-summierbar, wenn $\alpha_2 - \alpha_1 > p$. &

2.2.3 Bemerkung

Alle $\gamma \in \mathcal{H}$ sind polstellenfrei auf $\partial E$. Deshalb gilt für alle $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ $(f,(1-w)^{-\alpha_1}) \subset (f, \gamma(1-w)^{-\alpha_2})$.

Der Spezialfall $\delta = 0$ des nächsten Satzes stammt von Birindelli (vgl. [4], S. 172 ff).

2.2.4 Satz

Seien $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n := \gamma_2(w)/\gamma_1(w) \;, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n w^n := \gamma_1(w)/\gamma_2(w) \,, \quad \delta > -1$$

Wir haben für $\alpha \geq 1+\delta$

(i) $C_\delta - \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| < \infty \quad \Rightarrow (f,g_1) \subset (f,g_2)$

(ii) $C_\delta - \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\beta}_n| < \infty$ und (i) $\Rightarrow (f,g_1) \approx (f,g_2)$

Beweis: Wir brauchen nur (i) zu beweisen. Wie im Beweis zu 2.2.1 werden wir auf die Identität

$$\text{(1)} \qquad \frac{\gamma_2(w)}{\gamma_1(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} u_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} v_n w^n$$

geführt. Es ist demnach

$$\text{(2)} \qquad V_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\beta_{n-\nu}\, b_\nu^{(1)}}{b_n^{(2)}} U_\nu$$

Wir zeigen die Permanenz dieser FF-Transformation.

Es gilt $\sum_{\nu=0}^{n} \beta_{n-\nu} b_\nu^{(1)} = b_n^{(2)} \;\forall n \in \mathbb{N}^0$ aufgrund von (1).

Mit $[b_n^{(2)}]^{-1} = O(n^{1-\alpha})$ folgt $\lim \frac{\beta_{n-\nu}\, b_\nu^{(1)}}{b_n^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} o(n^{\delta+1-\alpha}) = 0$

für alle $\nu \in \mathbb{N}^0$. Wir haben hierbei $\beta_n = o(n^\delta)$ benutzt.

Wegen Lemma 1.2.3 gibt es $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$|b_n^{(1)}| < K_1 \binom{n+\alpha-1}{n}$ und $|b_n^{(2)}| > K_2 \binom{n+\alpha-1}{n}$

Daher gilt

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{b_{n-\nu}^{(1)}}{b_n^{(2)}} \beta_\nu \right| < \frac{K_1}{K_2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}} |\beta_\nu| = O(1)$$

denn rechts steht die Folge der $C_{\alpha-1}$-Transformierten (der Reihe $\sum|\beta_n|$) und diese ist nach der Voraussetzung mit Sicherheit beschränkt. &

Der bereits von Birindelli behandelte und in seiner Essenz auf Hardy, Littlewood und Riesz zurückgehende Teil des vorstehenden Satzes (vgl. Hardy [19], Theorem 167, S. 230), verdient hervorgehoben zu werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| < \infty, \; \alpha \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f, g_1) \subset (f, g_2)$$

Als besonders interessant wird sich der in 2.2.4 ausgeschlossene Grenzfall "$\delta = -1$" erweisen. Der Einfachheit halber formulieren wir nur die 2.2.4 (i) entsprechende Aussage.

2.2.5 Satz

Die Bezeichnungen seien dieselben wie in 2.2.4. Wenn dann $\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n| < \infty$ und $\beta_n = O(n^{-1})$, so gilt $(f, g_1) \subset (f, g_2)$ für alle $\alpha > 0$.

Beweis: Nach einem Satz von Hardy - Littlewood (Hardy [19] , Theorem 45, S. 101) impliziert die Voraussetzung die $C_\delta$-Summierbarkeit der Reihe $\sum \beta_n$ für jedes $\delta > -1$. Wegen Satz 2.2.4 ist deshalb alles gezeigt. &

Wir notieren jetzt einige Folgerungen zu den Sätzen 2.2.4 und 2.2.5.

2.2.6 Korollar

Es gilt $(f, \gamma_1(1-w)^{-\alpha}) \subset (f, \gamma_2(1-w)^{-\alpha})$ ohne Einschränkung für $\alpha > 0$, falls $\gamma_2/\gamma_1 \in \mathcal{H}''$ . Insbesondere ist $(f, (1-w)^{-\alpha}) \subset (f, \gamma(1-w)^{-\alpha})$ $\forall \gamma \in \mathcal{H}''$.

Beweis: Wir haben $\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n| < \infty$ und $\beta_n = O(n^{-1})$ aufgrund von Lemma 1.2.5 . &

Durch Spezialisierung erhalten wir ein weiteres Korollar

2.2.7 Korollar

Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}_0^*$ , $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt $(f, g_1) \subset (f, g_2)$, falls

(i) $\gamma_2/\gamma_1$ ist polstellenfrei auf $\partial E$ o d e r

(ii) $\gamma_1$ ist nullstellenfrei auf $\partial E$

Beweis: Man beachte Lemma 1.2.10. &

Hiermit können wir sofort auf ein wichtiges, für $\alpha_1 = \alpha_2 \geq 1$ von Birindelli herrührendes, Resultat schließen (vgl. [4], S. 174 f):

2.2.8 Satz

$$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}^*, \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow (f, g_1) \approx (f, g_2)$$

Insbesondere haben wir deshalb für alle $\gamma \in \mathcal{H}^*$ die Äquivalenz

$$(f, (1-w)^{-\alpha}) \approx (f, \gamma(1-w)^{-\alpha})$$

Wir sind nun in der Lage, die Permanenz gewisser (f,g)-Verfahren ohne die Beschränkung $\lambda > 1$ zu beweisen. Perron hat gezeigt, daß positive Eulersche Reihentransformationen permanent sind. Die Erweiterung seines Beweises für unsere Zwecke ist einfach.

2.2.9 Satz (vgl. Perron [16], § 2, Satz 1, S. 161)

Sei $f \in \mathfrak{F}$ mit $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ und $c_n \geq 0$. Falls $g \in \mathfrak{G}$ und $\alpha > 1$ oder $g \in \mathfrak{G}''$ und $\alpha \geq 1$, dann ist das Verfahren (f,g) permanent.

Beweis: Wir haben $(f,g) = (id,g)\ (f,(1-w)^{-1})$. Nach Bemerkung 2.2.3 und Korollar 2.2.6 ist (id,g) permanent. Es reicht also hin, die Permanenz des zweiten Faktors zu zeigen.
Wir untersuchen die RF-Transformation

(1) $$U_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} u_\nu \qquad \text{wobei}$$

(2) $$a_{n\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} c_k^{(\nu)}$$

Es gilt $\lim_{n \to \infty} a_{n\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k^{(\nu)} = [f(1)]^\nu = 1$ für alle $\nu \geq 0$

- 40 -

Ferner ist wegen $c_k^{(o)} = \delta_{ok}$ (Kroneckersymbol)

(3) $$\sum_{\nu=o}^{n} (a_{n\nu} - a_{n,\nu+1}) = a_{no} = 1 .$$

Wir sind daher fertig, wenn wir $a_{n\nu} - a_{n,\nu+1} \geq 0$ nachweisen können. Dazu berechnen wir

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} c_n^{(\nu+1)} w^n = [f(w)]^{\nu+1} = [f(w)]^{\nu} \cdot f(w)$$

$$= \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \sum_{\ell=\nu}^{n-1} c_{n-\ell} c_\ell^{(\nu)} w^n$$

woraus zunächst folgt

$$a_{n,\nu+1} = \sum_{k=\nu+1}^{n} c_k^{(\nu+1)} = \sum_{k=\nu+1}^{n} \sum_{\ell=\nu}^{k-1} c_{k-1} c_\ell^{(\nu)}$$

$$= \sum_{\ell=\nu}^{n-1} \sum_{k=\nu+1}^{n} c_{k-\ell} c_\ell^{(\nu)}$$

$$= \sum_{k=\nu}^{n} \sum_{\ell=\nu+1}^{n} c_{\ell-k} c_k^{(\nu)}$$

und schließlich, vermöge

$$\sum_{\ell=\nu+1}^{n} c_{\ell-k} \leq \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \leq f(1) = 1 ,$$

$$a_{n\nu} - a_{n,\nu+1} = \sum_{k=\nu}^{n} \Big(1 - \sum_{\ell=\nu+1}^{n} c_{\ell-k}\Big) c_k^{(\nu)} \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}^0$. &

2.2.10 Bemerkung

Die Punkte $w \in \partial E - \{1\}$ haben eine Darstellung $w = (2\cos t)\, e^{it}$ mit $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. In der Situation des letzten Satzes gilt daher für alle $w \in \partial E - \{1\}$

$$|f(w)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2\cos t)^n e^{int} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2\cos t)^n < 1$$

Nach dem Maximumprinzip ist deshalb $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$.
Im Hinblick auf die sich Korollar 2.1.7 anschließende Bemerkung, bringt daher der vorstehende Satz nur dann etwas Neues, wenn $\lambda = 1$.

Ein weitergehender Permanenzansatz für allgemeine Euler-Verfahren findet sich bei Bajsanski [2]. Indem wir dessen Aussage übernehmen, bekommen wir auf die gleiche Weise wie im Beweis zum letzten Satz:
$f \in \mathfrak{F}$, $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$, $f$ holomorph in 1,

$$f(w) = w^a + b\, i^p\, (w-1)^p + o(|w-1|^p) \text{ für } w \longrightarrow 1$$

mit $\operatorname{Re} b \neq 0$ und $a = f'(1)$,

$g \in \mathfrak{G}$ und $\alpha > 1$ oder $g \in \mathfrak{G}''$ und $\alpha \geq 1$

$\Longrightarrow$ $(f,g)$ permanent

Dieser Ansatz erfaßt von vorneherein nur Gronwall-Verfahren mit $\lambda = 1$ und $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$.

Ergänzend sei noch darauf verwiesen, daß $(f,g)$-Verfahren mit $f(\partial E) \cap \partial E - \{1\} \neq \emptyset$ und $\alpha < 1$ nicht permanent sein können.
Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.1.12.

## 2.3 Inklusionsbeziehungen bei gleicher Konstante $\lambda$

Vergleichssätze über Verfahren $(f_1,g_1)$, $(f_2,g_2)$ mit $\lambda_1 = \lambda_2$ sind bisher noch nicht publiziert worden.

Ein erstes Ergebnis in dieser Richtung enthält der folgende Satz:

### 2.3.1 Satz

Sei $f \in \mathcal{F}$ mit $\lambda = 1$; es gebe ein $\delta > -1$, so daß $\sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \nu^\delta = O(n^\delta)$. Für $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n := \frac{g(w)}{g \circ f(w)}$ sei $\sum |\beta_n|$ $C_\delta$-summierbar. Dann gilt

$$(id,g) \subset (f,g) \text{ , falls } \alpha \geq \delta+1$$

Beweis: Sei $(id,g)-\sum u_\nu = s$. Wir haben eine Identität

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(z)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n z^n \tag{1}$$

Die $(f,g)$-Transformierte der Reihe $\sum u_\nu$ sei $(V_n)_{n \geq 0}$. Folglich gilt mit $z = f(w)$

$$\frac{g(w)}{g(z)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n V_n w^n \tag{2}$$

Wir betrachten die durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{U}_n w^n \tag{3}$$

induzierte Transformation

$$\tilde{U}_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_n^{(\nu)} \frac{b_\nu}{b_n} U_\nu \tag{4}$$

und beschränken uns zunächst auf den Fall $s = 0$.

Sei also $\varepsilon > 0$ und für alle $n > N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gelte $|U_n| < \varepsilon$. Dann ist

(5) $$|\tilde{U}_n| \leq \sum_{\nu=0}^{N} |c_n^{(\nu)}| \left|\frac{b_\nu}{b_n}\right| |U_\nu| + \varepsilon \cdot \sum_{\nu=N+1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \left|\frac{b_\nu}{b_n}\right|$$

Nach Bemerkung 2.1.10 existiert eine reelle Konstante $K > 0$, so daß $|c_n^{(\nu)}| < Kn^{-1+\alpha/2}$ für $0 \leq \nu \leq N$ und $n > N$. Weiter gibt es ein $M > 0$ und ein $L < \infty$ mit $|b_n| > Mn^{\alpha-1}$ und $|b_n| < Ln^{\alpha-1}$ für alle $n > N$. Deshalb folgern wir aus (5)

(6) $$\begin{aligned} |\tilde{U}_n| &< \frac{K}{M} n^{-\alpha/2} \sum_{\nu=0}^{N} |b_\nu| \cdot \max_{0 \leq k \leq N} |U_k| + \varepsilon \cdot \frac{L}{M} \sum_{\nu=N+1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha-1} \\ &< O(n^{-\alpha/2}) + \varepsilon \cdot \frac{L}{M} \sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\delta} \\ &= O(n^{-\alpha/2}) + \varepsilon \cdot O(1) \end{aligned}$$

bzw. $\tilde{U}_n = o(1)$ für $n \longrightarrow \infty$.

Wir wollen letztlich $V_n = o(1)$ zeigen. Dazu müssen wir nun noch die Identität

(7) $$\frac{g(w)}{g \circ f(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{U}_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n V_n w^n$$

untersuchen. Aufgrund der Voraussetzungen über den Faktor $g/g\circ f$ können wir ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.2.4 (i) auf $V_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$ schließen.

Damit haben wir $U_n \rightarrow 0 \Rightarrow V_n \rightarrow 0$ gezeigt. Darauf aufbauend erledigt sich der allgemeine Fall fast von selbst. Denn aus $U_n \longrightarrow s$ folgt jetzt mit (2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n V_n w^n &= \frac{g(w)}{g(z)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (s + U_n - s) z^n \\ &= s \cdot g(w) + \frac{g(w)}{g(z)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (U_n - s) z^n \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} b_n (s + \tilde{V}_n) w^n \end{aligned}$$

und daher $V_n = s+\tilde{V}_n \longrightarrow s+0$ für $n \longrightarrow \infty$. &

Ein hinreichendes Kriterium für $\sum_{\nu=0}^{n} |c_n^{(\nu)}| = O(1)$ liefert der folgende Hilfssatz:

2.3.2 Lemma

$(f, (1-w)^{-1})$ permanent, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n := \frac{1-w}{1-f(w)} = \frac{1}{\psi(w)}$ absolut konvergent in $w = 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\nu=0}^{n} |c_n^{(\nu)}| = O(1) \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

Beweis: Wir definieren das FF-Verfahren

$$(1) \qquad V_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_n^{(\nu)} U_\nu \quad , \quad n \geq 0$$

Es besteht die Identität

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu (f(w))^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} V_n w^n$$

Nun gelte $\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu := U_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Nach Voraussetzung geht dann auch $\tilde{U}_n$ gegen Null, wenn

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu (f(w))^\nu = (1-w) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n w^n$$

Daraus folgt aber

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_n w^n = (1-f(w))^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu [f(w)]^\nu = \frac{1-w}{1-f(w)} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n w^n$$

mithin ist $V_n = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{n-\nu} \tilde{U}_\nu$ und daher wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ ,

$$(5) \qquad |V_n| \leq \sup_{0 \leq \nu \leq n} |\tilde{U}_\nu| \cdot \sum_{\nu=0}^{n} |\beta_n| = O(1) \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Durch (1) wird demnach jede Nullfolge in eine be-beschränkte Folge transformiert. Ein bekannter Satz (vgl. Beekmann [23], Satz 1.10, S. 1/14) liefert nun die Aussage. &

Für eine interessante Klasse von (f,g)-Verfahren können wir die doch etwas kompliziert anmutenden Voraussetzungen von Satz 2.3.1 abschwächen. Wir verweisen insbesondere auf die Teilbedingung (ii) des nächsten Satzes, welche wir in den praktisch relevanten Fällen oft unter Berufung auf Satz 2.2.9 verifizieren können.

2.3.3 Satz

Seien $f \in \mathcal{F}^*$, $\lambda = 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n := \frac{\gamma(w)}{\gamma \circ f(w)}$ absolut konvergent für $w = 1$ mit $\beta_n = o(n^{-1})$. Wenn

(i) $\sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}|\nu^{\delta} = O(n^{\delta})$ und $\alpha \geq \delta+1$ für ein $\delta > -1$ oder

(ii) $(f, (1-w)^{-1})$ permanent und $\alpha \geq 1$,

dann gilt $(id, g) \subset (f, g)$

Beweis: Nach 2.3.2 und 1.3.3 ist (ii) für $\delta = 0$ in (i) enthalten. Um (i) zu zeigen, müssen wir wegen 2.3.1 nur die $C_\delta$-Summierbarkeit der Reihe $\sum |\tilde{\beta}_n|$ nachweisen, wobei $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n w^n := \frac{g(w)}{g \circ f(w)}$.

Wir haben

$$(1) \qquad \frac{g(w)}{g \circ f(w)} = \left(\frac{1-f(w)}{1-w}\right)^{\alpha} \frac{\gamma(w)}{\gamma \circ f(w)}$$

$$= [\Psi(w)]^{\alpha} \frac{\gamma(w)}{\gamma \circ f(w)}$$

Wegen $f \in \mathfrak{F}^*$ ist $\Psi$ $H_\varepsilon$-stetig in 1 für ein $\varepsilon > 0$. Es folgt leicht $[\Psi(w)]^\alpha = [\Psi(1)]^\alpha + O(|1-w|^\varepsilon)$ für $w \to 1$. Daher können wir Lemma 1.2.10 auf $\Psi^\alpha$ anwenden und finden so $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ und $a_n = O(n^{-1})$ für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n := [\Psi(w)]^\alpha$. Demnach konvergiert auch $\sum \tilde{\beta}_n$ absolut.

Weiter sind $\sum|\beta_n|$ und $\sum|a_n|$ beide $C_{-1+\frac{\delta+1}{2}}$-summierbar (vgl. Hardy [19], Theorem 45, S. 101), und deshalb $\sum|\tilde{\beta}_n|$ $C_{-1+\frac{\delta+1}{2}-1+\frac{\delta+1}{2}+1} \equiv C_\delta$-summierbar (vgl. Hardy [19], Theorem 164, S. 228). &

Eine weitere Spezialisierung beschreiben wir im nächsten Satz, wo wir indes nur noch die Bedingung (i) des letzten Satzes mitführen, bemerken jedoch, daß wir in den restlichen Sätzen dieses Abschnitts stets 2.3.3 (ii) hinzufügen können.

2.3.4 <u>Satz</u>

Seien $f \in \mathfrak{F}^*$, $\lambda = 1$ und $\sum_{\nu=1}^{n}|c_n^{(\nu)}|\nu^\delta = O(n^\delta)$, $\delta > -1$. Wenn $\alpha \geq \delta+1$ und eine der beiden Bedingungen

(i) $g \in \mathfrak{G}_0^*$ und $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$

(ii) $g \in \mathfrak{G}_1^*$

erfüllt ist, dann gilt $(id,g) \subset (f,g)$

Beweis: Nach 2.3.3 und Lemma 1.2.10 genügt es $\gamma/\gamma\circ f \in \mathcal{H}_0^*$ zu zeigen. Da $(\mathcal{H}^*, \cdot)$ eine Gruppe ist, müssen wir nur noch $\gamma\circ f \in \mathcal{H}^*$ nachweisen. Aufgrund von (i) bzw. (ii) ist $\gamma\circ f$ nullstellenfrei auf dem Rand des Einheitskreises. Weiterhin existiert ein $R > 1$, so daß $\gamma\circ f$ holomorph ist auf $\bar{\Delta}_R(1) - [1,R]$. Endlich ist $\gamma\circ f$ stetig in 1 und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(1) \qquad \gamma\circ f(w) = \gamma(1) + O(|1-f(w)|^\varepsilon) = \gamma\circ f(1) + O(|1-w|^\varepsilon)$$

Folglich ist $\gamma \circ f \in \mathcal{H}^*$. &

Mit den Sätzen des letzten Abschnitts bekommen wir ein Korollar.

2.3.5 Korollar

Seien $f \in \mathfrak{F}^*$, $\lambda = 1$ und $\sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \nu^{\delta} = O(n^{\delta})$, $\delta > -1$ sowie $g_1 \in \mathfrak{G}_0^*$, $g_2 \in \mathfrak{G}$ mit $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \delta+1$.

(i) $\gamma_1$ nullstellenfrei auf $\partial E$ und $\alpha_2 > \alpha_1$

(ii) $\gamma_2/\gamma_1$ polstellenfrei auf $\partial E$ und $\alpha_2 > \alpha_1$

(iii) $\gamma_2/\gamma_1 \in \mathcal{H}''$

(iv) $f(\bar{E}) - \{1\} \subset E$

Es gilt $(id, g_1) \subset (f, g_2)$, falls (i) oder (ii) und (iv) oder (iii) und (iv).

Beweis: Nach 2.3.4 haben wir in allen Fällen $(id, g_1) \subset (f, g_1)$. 2.2.2 (bzw. 2.2.3) und 2.2.4 (i) liefern die Inklusion $(f, g_1) \subset (f, g_2)$. &

Wir können $(id, g_1) \subset (f, g_2)$ auch nachweisen, indem wir $(id, g_1) \subset (id, g_2) \subset (f, g_2)$ zeigen. Dies führt uns auf eine 2.3.5 entsprechende Folgerung.

2.3.6 Korollar

Seien $f \in \mathfrak{F}^*$, $\lambda = 1$ und $\sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \nu^{\delta} = O(n^{\delta})$, $\delta > -1$ sowie $g_1 \in \mathfrak{G}$, $g_2 \in \mathfrak{G}_0^*$ mit $\alpha_2 \geq \alpha_1$, $\alpha_2 \geq \delta+1$. Dann gelten die Implikationen von 2.3.5.

Der Beweis läuft völlig analog.

2.3.7 Satz

Seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}^*$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $f_2(E) \subset f_1(E)$, $\alpha_2 \geq \alpha_1$ sowie $g_1 \in \mathfrak{G}_0^*$, $g_2 \in \mathfrak{G}$ und $\alpha_1 \geq \delta+1$ oder $g_1 \in \mathfrak{G}$,

$g_2 \in \mathfrak{G}_0^*$ und $\alpha_2 \geq \delta+1$. Für $f := f_1^{-1} \circ f_2$ gelte
$\sum_{\nu=1}^{n} |c_n^{(\nu)}| \nu^\delta = O(n^\delta)$ mit $\delta > -1$

(i) $\gamma_1$ nullstellenfrei auf $\partial E$ und $\alpha_2 > \alpha_1$

(ii) $\gamma_2/\gamma_1$ polstellenfrei auf $\partial E$ und $\alpha_2 > \alpha_1$

(iii) $\gamma_2/\gamma_1 \in \mathcal{H}''$

(iv) $f_2(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1(E)$

Wir haben $(f_1, g_1) \subset (f_2, g_2)$, falls (i) oder (ii) und (iv) oder (iii) und (iv); insbesondere ist $(f_1, g) \subset (f_2, g)$, wenn $g \in \mathfrak{G}_0^*$ und (iv) oder $g \in \mathfrak{G}^*$ und in beiden Fällen $\alpha \geq \delta + 1$.

Beweis: Wir schreiben $\tilde{z} = f_1(\tilde{w})$ und $z = f_2(w)$
Sei $\sum u_\nu$ $(f_1, g_1)$-summierbar und $(U_n)_{n \geq 0}$ die zugehörige Gronwall-Transformierte; weiterhin sei $(V_n)_{n \geq 0}$ die entsprechende, über $(f_2, g_2)$ gewonnene Folge. Dann bestehen die Identitäten

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \tilde{z}^\nu &= \frac{1}{g_1(\tilde{w})} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n \tilde{w}^n \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu &= \frac{1}{g_2(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} V_n w^n \end{aligned}$$

Durch $\tilde{z} = z$ wird eine (wegen $f_2(E) \subset f_1(E)$ wohldefinierte) Abbildung $f := f_1^{-1} \circ f_2$ vermittelt. Mit (1) bedeutet dies

$$(2) \qquad \frac{g_2(w)}{g_1 \circ f(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n [f(w)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} V_n w^n$$

Daher haben wir die in Rede stehenden Implikationen auf die Frage $(id, g_1) \subset (f, g_2)$ ? zurückgeführt. Nach Satz 2.3.4 und Korollar 2.3.5/6 ist alles gezeigt (man beachte das nachstehende Lemma). &

Zur vollständigen Klärung des im Satz 2.3.7 dargelegten Sachverhalts, bedarf es noch des Nachweises, daß $(f,(1-w)^{-1})$ tatsächlich ein Gronwall-Verfahren mit $\lambda = 1$ ist.

Wir formulieren diesbezüglich den Hilfssatz

2.3.8 <u>Lemma</u>

$$f_1, f_2 \in \mathfrak{F}\ ,\ f_2(E) \subset f_1(E) \Rightarrow f = f_1^{-1} \circ f_2 \in \mathfrak{F} \text{ mit } \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Beweis: Wegen $f_2(E) \subset f_1(E)$ ist f wohldefiniert und es gilt $f(E) \subset E$, $f(0) = 0$ sowie $f(1) = 1$. Wir haben ferner

$$(1) \qquad \begin{aligned} 1-\tilde{z} &= (1-\tilde{w})^{1/\lambda_1}\,\psi_1(\tilde{w}) \qquad \text{und} \\ 1-z &= (1-w)^{1/\lambda_2}\,\psi_2(w) \end{aligned}$$

Damit also für $z = \tilde{z}$

$$(2) \qquad 1-\tilde{w} = (1-w)^{\lambda_1/\lambda_2}\,[\psi_2(w)/\psi_1 \circ f(w)]^{\lambda_1}$$

Da mit $f_1$ und $f_2$ auch f biholomorph ist auf $\bar{E}-\{1\}$, folgt insgesamt $f \in \mathfrak{F}$ mit $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$. &

Im Anschluß daran bemerken wir noch

2.3.9 $$f_1, f_2 \in \mathfrak{F}^* \Rightarrow f \in \mathfrak{F}^*$$

Denn nach 2.3.8 (2) gilt $\psi(w) = [\psi_2(w)/\psi_1 \circ f(w)]^{\lambda_1}$ und daher können wir mit den im wesentlichen gleichen Argumenten wie im Beweis zu Satz 2.3.3 bzw. 2.3.4 $\psi \in \mathcal{H}^*$ folgern. &

## 2.4 Verträglichkeit und Translativität.

### Ein Umkehrsatz.

Obwohl die in diesem Abschnitt dargelegten Sachverhalte nicht unbedingt unter die Überschrift "Vergleich von (f,g)-Verfahren" passen, haben wir sie noch im Kapitel 2 aufgenommen, weil es sich fast durchweg um grundlegende Aussagen über die Struktur von Gronwall-Verfahren handelt, und einige Vergleichssätze der vorangegangenen Abschnitte zur Anwendung kommen.

Die Verträglichkeit von (f,g)-Verfahren hat man bislang noch nicht näher untersucht. Zu diesem Schluß führt jedenfalls die Durchforstung der am Ende aufgeführten Literatur (s.a. Zeller - Beekmann [22] mit weiteren Literaturverweisen). Nur bei Amerio findet sich ein Hinweis auf Verträglichkeitsfragen. Er beschreibt ein Paar unverträglicher Gronwall-Verfahren (vgl. [1], S. 253), bleibt den Existenzbeweis allerdings schuldig. Insofern ist noch nicht einmal gewiß, ob es Paare nichtverträglicher (f,g)-Verfahren gibt.

Wir charakterisieren nun die Verträglichkeit von Gronwall-Verfahren durch eine topologische Bedingung.

2.4.1 Satz

Zwei Gronwall-Verfahren $(f_1,g_1)$, $(f_2,g_2)$, sind genau dann verträglich, wenn $f_1(E) \cap f_2(E)$ einen Weg $W \in \mathcal{W}(0,1)$ enthält.

Beweis: Der hinreichende Teil läßt sich leicht beweisen. Seien etwa $(f_i,g_i)-\sum u_n = s_i$, $i=1,2$. Mit Satz 2.1.1 folgt sofort $A^*(\theta,W)-\sum u_n = s$ für alle $\theta \leq \min\left\{\frac{\pi}{2\lambda_1}, \frac{\pi}{2\lambda_2}\right\}$ und $s_1 = s = s_2$ .

Wir kommen nun zur Notwendigkeit der Bedingung. Seien $W_1, W_2$ einfache Wege in $f_1(E) \cup \{1\}$ bzw. $f_2(E) \cup \{1\}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1. Wir können $W_1$ und $W_2$ stets so wählen, daß $W_1+(-W_2)$ ein einfach geschlossener Weg ist. Sein Inneres bezeichnen wir mit D (siehe Fig. 3).

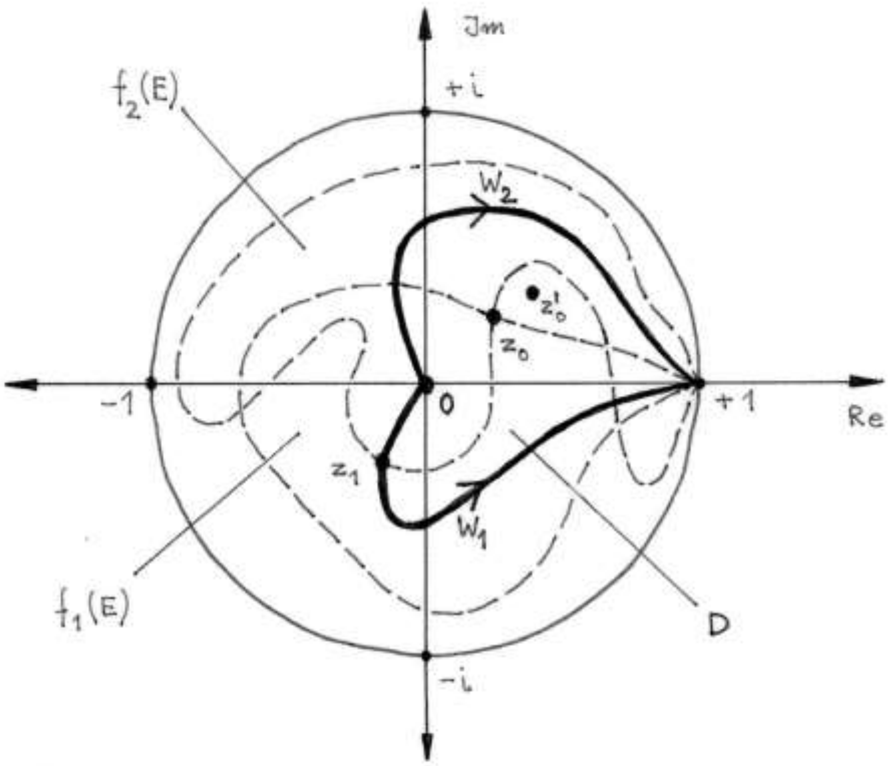


Fig. 3

Wenn $f_1(E) \cap f_2(E) \cup \{1\}$ keinen Weg W von 0 bis 1 enthält, so schneidet der Weg $W_1$ sicher die Kurve $f_2(\partial E)$. In 0 beginnend, durchlaufen wir $W_1$ bis zum ersten Schnittpunkt $z_1$ mit $f_2(\partial E)$. Sodann folgen wir der Kurve $f_2(\partial E)$ in D hinein. $f_2(\partial E) - \{1\}$ kann nicht ganz in $f_1(E)$ liegen, weil wir sonst (leicht) einen Weg von 0 nach 1 in $f_1(E) \cap f_2(E) \cup \{1\}$ konstruieren könnten. Daher existiert ein Punkt $z_0 \in f_1(\partial E) \cap f_2(\partial E)$ , $z_0 \neq 1$, mit $z_0 \in D$.

Leider können wir nun im allgemeinen nicht auf Punkte $z_0' \in D$ mit $z_0' \notin f_1(\bar{E}) \cup f_2(\bar{E})$ schließen (s. a. Fig. 4).

Dies ist der Grund dafür, daß wir im folgenden nicht alleine mit Korollar 2.1.4 bzw. Satz 2.1.3 auskommen, sondern auch auf die Bemerkung 2.1.11 zurückgreifen müssen.
Wir betrachten jetzt die für $|z|<|z_o|<1$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(1-\frac{z}{z_o})^{1/2} = \sum_{n=o}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-\frac{z}{z_o})^n \qquad \text{(Hauptwert)}$$

Offensichtlich können wir dieses Funktionselement holomorph auf $f_1(\bar{E})-\{z_o\}$ bzw. $f_2(\bar{E})-\{z_o\}$ fortsetzen.
Bei Fortsetzung längs $W_1$ erhalten wir mit $r_o := \left|1-\frac{1}{z_o}\right|$ den Wert $\Phi_1(1) = \sqrt{r_o}\, e^{i2\pi\cdot\frac{1}{2}}$. Dagegen ist $\Phi_2(1) = \sqrt{r_o}\, e^{i\cdot 0\cdot\frac{1}{2}}$
Also folgt aufgrund von Korollar 2.1.4 in Verbindung mit Bemerkung 2.1.11

$$(f_1,g_1)-\sum \binom{1/2}{n} (-\frac{z}{z_o})^n = -r_o^{1/2}$$

$$\neq \quad r_o^{1/2} = (f_2,g_2)-\sum \binom{1/2}{n} (-\frac{z}{z_o})^n$$

womit wir auch den notwendigen Teil der Aussage verifiziert haben. &

Um auch das angesprochene Existenzproblem zu erledigen, müssen wir auf den Satz 3.3.1 vorgreifen (es entsteht kein Ringschluß !).
Sei $H_+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ die positive Halbebene; entsprechend verstehen wir unter $H_-$ die negative Halbebene. Wir betrachten die Mengen

$$D_+ := \Delta_{1/4}(0) \cup (\Delta_{1/4}(1) \cap E) \cup (H_+ \cap E)$$

und $D_-$ (analog definiert; siehe Fig. 4).

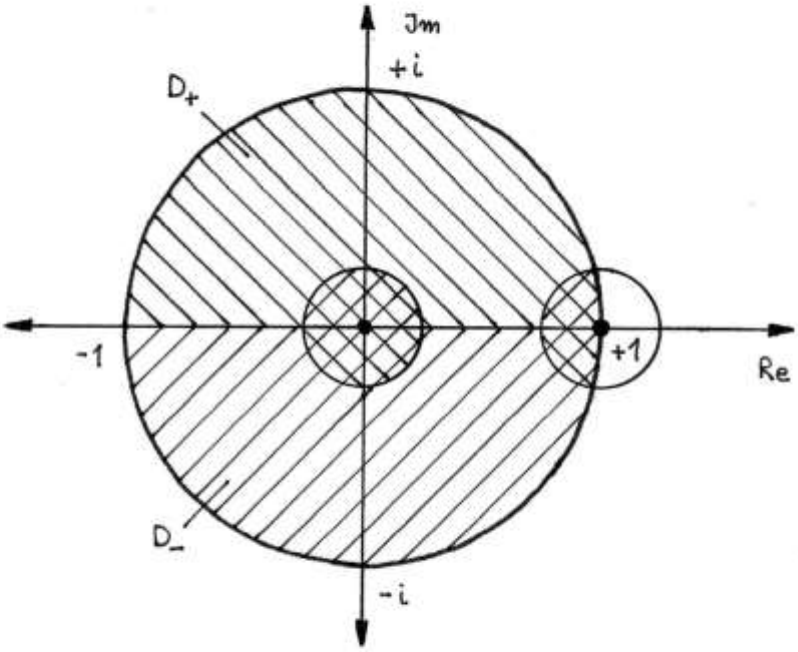


Fig. 4

Nach Satz 3.3.1 existieren zwei Funktionen $f_+, f_- \in \mathfrak{F}$ mit $f_+(\bar{E}) - \{1\} \subset D_+$ und $f_-(\bar{E}) - \{1\} \subset D_-$ . Da in $D_+ \cap D_-$ offensichtlich kein Weg von O nach 1 enthalten ist, genügt $f_+(E) \cap f_-(E)$ nicht der hinreichenden Bedingung des Charakterisierungssatzes 2.4.1. Daher haben wir bewiesen:

2.4.2 Satz

Es gibt ein Paar nichtverträglicher (f,g)-Verfahren.

Publikationen über Translativität bei Gronwall-Verfahren sind dem Verfasser nicht bekannt. Bezüglich der verwandten Euler-Verfahren (siehe Einleitung) gibt es jedoch ein dahingehendes Resultat (vgl. Zeller - Beekmann [22], Satz 65 III, S. 133; s.a. Perron [16], Sätze 2 und 3, S. 161 ff). Indes bringt dies hier nicht allzuviel, da man für die Euler-Verfahren gemeinhin die Holomorphie von f in 1 verlangt.

Im folgenden Satz, der eigentlich mehr den Charakter eines Lemmas hat, reduzieren wir die Frage nach der Translativität von (f,g)-Verfahren auf ein Äquivalenzproblem:

2.4.3 Satz

Ein Gronwall-Verfahren (f,g) ist genau dann translativ, wenn

$$(f,g) \approx (f, \frac{f}{id}\, g)$$

Beweis: " $\Leftarrow$ ": Wir haben $U_n \rightarrow s \Leftrightarrow \tilde{U}_n \rightarrow s$ wobei

(1) $$\sum_{\nu=o}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} b_n U_n w^n$$

(2) $$\sum_{\nu=o} u_\nu z^\nu = \frac{w}{f(w)g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} \tilde{b}_n \tilde{U}_n w^n$$

mit $\tilde{g} := \frac{f}{id} \cdot g$. (2) bedeutet aber gerade

$$\frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} b_n V_n w^n := \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu-1} z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} \tilde{b}_n \tilde{U}_n w^{n+1}$$

$$= \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} \tilde{b}_{n-1} \tilde{U}_{n-1} w^n$$

$$= \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} b_n \left(\frac{\tilde{b}_{n-1}}{b_n} \tilde{U}_n\right) w^n$$

Wegen $\tilde{b}_n \approx \frac{f(1)}{1} \frac{\gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha -1}$ gilt $\frac{\tilde{b}_{n-1}}{b_n} \rightarrow 1$, und folglich $V_n \rightarrow s$ genau dann, wenn $\tilde{U}_n \rightarrow s$.

" $\Rightarrow$ ": Es gelte $(f,g) \not\approx (f, \frac{f}{id}\, g)$. Dann gibt es eine Reihe $\sum u_\nu$, so daß $(U_n)$ konvergiert, $(\tilde{U}_n)$ aber divergiert. Daher muß auch $(V_n)$ divergieren. Im umgekehrten Fall existiert eine Reihe $\sum u_\nu$ mit der konvergenten Gronwall-Transformierten $(\tilde{U}_n)$ (also ist auch $(V_n)$ konvergent) während $(U_n)$ divergiert. Demnach wäre (f,g) nicht translativ. &

2.4.4 Bemerkung

Im hinreichenden Beweisteil haben wir sogar die Verträglichkeit gezeigt. Daher ist ein Gronwall-Verfahren translativ mit Verträglichkeit schon dann, wenn es translativ ist. Dies beruht letztlich auf der (im Beweisteil "$\Rightarrow$" implizit benutzten) Verträglichkeit aller Gronwall-Verfahren mit gleicher f-Komponente (s. Satz 2.4.1).

Nun geben wir eine hinreichende Bedingung für die Translativität von (f,g)-Verfahren und zeigen, daß eine große Klasse von Gronwall-Verfahren tatsächlich translativ ist. Entscheidende Bedeutung kommt dem Satz 2.4.3 zu.

Im ersten Satz benutzen wir wie gehabt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n = f(w)$.

Weiter setzen wir $\sum_{n=o}^{\infty} \tilde{c}_n w^n := \frac{w}{f(w)}$ .

2.4.5 Satz

Ein Gronwall-Verfahren (f,g) ist translativ mit Verträglichkeit, wenn $\alpha \geq 1+\delta > 0$ und $\sum |c_n|$ und $\sum |\tilde{c}_n|$ $C_\delta$-summierbar sind.

Beweis: Wegen Satz 2.4.3 genügt der Hinweis auf Satz 2.2.4 (ii) um alles zu zeigen. &

Wir heben hervor:

Ein Gronwall-Verfahren (f,g) mit $\alpha \geq 1$ ist translativ mit Verträglichkeit, wenn $\sum c_n$ und $\sum \tilde{c}_n$ absolut konvergieren.

2.4.6 Satz

Gronwall-Verfahren (f,g) mit $f \in \mathfrak{F}'$ sind translativ mit Verträglichkeit.

Beweis: Nach 1.3.3 ist $\frac{f}{id} \in \mathcal{H}^*$. Wegen Satz 2.2.8 gilt daher $(f,g) \approx (f, \frac{f}{id}\, g)$. Satz 2.4.3 liefert nun die Aussage. &

Wir kommen nun zu dem in der Überschrift angekündigten Umkehrsatz. Einen ersten Umkehrschluß haben wir bereits in Satz 2.1.3 formuliert. Wir bemühen uns um eine Verschärfung desselben.
Ausschlaggebend ist der folgende, auf Montel zurückgehende Satz, den wir mit Hilfe des Satzes von Vitali (vgl. etwa Titchmarsh [21] , Theorem 5.21, S. 168) beweisen.

2.4.7 Satz (vgl. Titchmarsh [21] , Theorem 5.23, S. 170) [1)]

Für ein $\theta_0$, $0 < \theta_0 \leq \pi$, und ein $r_0 > 0$ sei $\Phi$ holomorph und beschränkt in $S(\theta_0) \cap \Delta_{r_0}(1)$. Gilt dann $\Phi(x) \to s$ für $1-r_0 < x \to 1-$, so auch $\Phi(z) \to s$ für $z \to 1$ in $S(\theta)$, unabhängig von $0 \leq \theta < \theta_0$.

Beweis: Wir definieren $\Phi_n(z) := \Phi(1-\frac{1-z}{n})$, $n \geq 1$, für $z \in S(\theta_0) \cap \Delta_{r_0}(1)$. Die Folge $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ ist gleichartig beschränkt in $S(\theta_0) \cap \Delta_{r_0}(1)$ und für alle $x \in \,]1-r_0, 1[$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = s$. Nach dem Satz von Vitali konvergiert daher $\Phi_n$ für jedes $\theta < \theta_0$ in $S(\theta) \cap \Delta_{r_0}(1)$ kompakt gegen s. &

Unter Berücksichtigung von Satz 2.1.3 fließt hieraus unmittelbar der nachstehende Umkehrsatz für (f,g)-Verfahren (Verschärfung von Satz 2.1.3):

2.4.8 Satz

Sei $\Phi$ holomorph auf $f(\bar{E}) - \{1\}$ und für ein $\theta > \frac{\pi}{2\lambda}$ gelte $\Phi(z) = O(1)$ bei $z \to 1$, $z \in S(\theta)$. Ferner sei $\sum u_\nu$ $A^*$-summierbar zur Summe s. Dann gilt auch $(f,g)-\sum u_\nu = s$.

1) Bei Titchmarsh wird eine Variante dieses Satzes für unbeschränkte Streifengebiete bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 2.1.1 und Satz 2.4.1 können wir eine Folgerung ziehen:

2.4.9 Korollar

Sei $\Phi$ holomorph auf $f_1(\bar{E}) - \{1\}$ und für ein $\theta > \frac{\pi}{2\lambda_1}$ gelte $\Phi(z) = O(1)$ bei $z \longrightarrow 1$, $z \in S(\theta)$. Ferner sei $\sum u_\nu$ $(f_2, g_2)$-summierbar zur Summe $s$ und $f_1(E) \cap f_2(E)$ enthalte einen Weg aus $\mathcal{W}(0,1)$. Dann gilt auch
$(f_1, g_1) - \sum u_\nu = s$ .

Dieses Korollar hat eine bemerkenswerte Konsequenz; jetzt können wir nämlich einen "Konvexitätssatz" für Gronwall-Verfahren beweisen:

2.4.10 Satz

Seien $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ und $f_2(E) \subset f(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1(E)$.
Ist dann $|(f_1, g_1) - \sum u_\nu| < \infty$ [1] und $(f_2, g_2) - \sum u_\nu = s$ ,
so gilt $(f, g) - \sum u_\nu = s$ .

Beweis: Wie der Beweis von Satz 2.1.1 zeigt, ist die Voraussetzung $|(f_1, g_1) - \sum u_\nu| < \infty$ hinreichend für die Holomorphie von $\Phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ in $f_1(E)$. Weiter schließen wir, ähnlich wie im Beweis zu 2.1.1, auf
$\Phi(z) = O(1)$ für $z \longrightarrow 1$ in $S(\theta)$ mit $\lambda_1 \theta < \frac{\pi}{2}$ .
Wir wählen $\theta$ speziell so, daß $\lambda \theta > \frac{\pi}{2}$ .
Die Aussage ergibt sich nun nach Anwendung von Korollar 2.4.9 ($f$ in der Rolle von $f_1$ ebd.). &

1) Das soll heißen: Die Folge $(U_n^{(1)})$ der $(f_1, g_1)$-Transformierten der Reihe $\sum u_\nu$ ist beschränkt.

# 3. AUSBAU DER THEORIE

## 3.1 Analytische Fortsetzung. Äquivalenz von (f,g)-Verfahren

Wenn sich ein Funktionselement $\sum a_n \zeta^n$ in den Punkt $\zeta_0$ hinein analytisch fortsetzen läßt, dann können wir bei gegebenem $f \in \mathfrak{F}$ eine solche Fortsetzung $\Phi = \Phi_f$ mittels des Kreiskettenprozesses längs Kurven $\zeta_0 \cdot f(w)$, $0 \leq w \leq 1$, gewinnen. Wir betonen, daß wir damit im allgemeinen nicht die Fortsetzung in den Mittag-Leffler-Stern des betrachteten Funktionskeims erhalten.

Der Grundgedanke zum Beweis des folgenden Satzes (ohne die behauptete kompakte Summierbarkeit) geht auf Perron zurück (vgl. [16] , Satz 7, S. 168; s. a. Amerio [1] , Teorema XII, S. 256). Birindelli beweist diesen Satz für $f \in \mathfrak{F}'$ auf anderem Wege (vgl. [4] , S. 170).

### 3.1.1 Satz

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_0^n$ ist kompakt (f,g)-summierbar mit der Summe $\Phi(\zeta_0) = \Phi_f(\zeta_0)$ in

$$D := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Phi \text{ ist holomorph auf } \zeta \cdot f(\bar{E})\}$$

Falls $\Phi$ schon im Innern von $\zeta_0 \cdot f(E)$ eine Polstelle hat, dann ist $\sum a_n \zeta_0^n$ nicht (f,g)-summierbar.

Beweis: Sei $\zeta_0 \in D$ . Dann ist mit $\tilde{\Phi}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_0^n z^n$ die Funktion $\tilde{\Phi}$ nach Definition von D holomorph auf $f(\bar{E})$. Nach Korollar 2.1.4 ist daher $(f,g)\text{-}\sum a_n \zeta_0^n = \tilde{\Phi}(1) = \Phi(\zeta_0)$. Sei nun $K_1 \subset D$ ein Kompaktum. Dann gibt es eine kompakte Menge $K_2$ mit $\bar{E} \subset \mathring{K}_2$, so daß $\Phi(\zeta \cdot z)$ für $\zeta \in K_1$, $z \in K_2$ , eine stetige Funktion von $\zeta$ und $z$ ist. Daher existiert eine positive reelle Zahl $\breve{M}$ mit

(1) $\quad |\Phi(\zeta \cdot f(w))| < \breve{M}$ für alle $\zeta \in K_1$, $w \in \overline{\Delta}_R(0)$

(wobei wir $R > 1$ so klein zu wählen haben, daß die Inklusion $f(\overline{\Delta}_R(0)) \subset K_2$ besteht) , was jedoch stets möglich ist). Mit den notwendigen Abänderungen können wir daher im Beweis zu Satz 2.1.3 (im Sinne des Korollars 2.1.4) die Konstante $M$ durch $M + \tilde{M}$ ersetzen. Demnach erhalten wir ebendort $U_n = U_n(\zeta) \longrightarrow \Phi(\zeta)$ gleichmäßig in $K$.

Der erste Teil der Aussage ist deshalb bewiesen. Nun sei $\zeta_0 \cdot f(w_0)$ für ein $w_0 \in E$ Polstelle von $\Phi$ . Dann hat also die rechte Seite von

$$g(w) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_0^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

einen Pol in $w = w_0$ . Daher muß die Folge $(U_n)$ unbeschränkt divergieren. &

Als Anwendung bestimmen wir jetzt den Summationsbereich der geometrischen Reihe.

3.1.2 Satz (Spezialfall $f \in \mathfrak{F}'$ vgl. Birindelli [4], S. 164 ff)

Sei $D$ das Innere des durch die Kurve

$$\zeta = \frac{1}{f(e^{it})} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

berandeten Gebietes.

(i) Die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^\nu$ ist in $D$ kompakt $(f,g)$-summierbar zum Wert $\frac{1}{1-\zeta}$ .

(ii) Außerhalb $\bar{D}$ und für $\zeta = 1$ divergiert die $(f,g)$-Transformierte von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^\nu$ unbeschränkt.

Beweis: Wir haben die Äquivalenzen

$$\zeta \in D \iff \frac{1}{\zeta} \notin f(\bar{E}) \iff 1 \notin \zeta \cdot f(\bar{E})$$

Nun hat ja $\Phi(\zeta) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^\nu$ in $\zeta = 1$ einen Pol erster Ordnung und ist in allen übrigen Punkten $\zeta \in \mathbb{C}$ holomorph. Also ist $\Phi$ holomorph auf $\zeta \cdot f(E)$ genau dann, wenn $1 \notin \zeta \cdot f(\bar{E})$. (i) folgt demnach sofort aus Satz 3.1.1.

Ebenso der erste Teil von (ii). Wir müssen also nur noch den Fall $\zeta = 1$ erledigen. Wir haben

$$\frac{1}{1-f(w)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^{\nu}[f(w)]^{\nu} = \frac{(1-w)}{\gamma(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n$$

also
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n = \frac{\gamma(w)}{\psi(w)} (1-w)^{-\alpha-1/\lambda}$$

Nach 1.2.7 und Bemerkung 2.1.10 ist die rechte Seite in $\mathfrak{G}$.
Mit Lemma 1.2.3 können wir daher auf

$$b_n U_n \approx \frac{\gamma(1)}{\psi(1)\cdot\Gamma(\alpha+1/\lambda)}\, n^{\alpha+1/\lambda\;-1}$$

bzw.
$$U_n \approx \frac{\Gamma(\alpha)}{\psi(1)\,\Gamma(\alpha+1/\lambda)}\, n^{1/\lambda}$$

schließen. &

Birindelli hat diesen Satz in Verallgemeinerung einer von Gronwall [11] herrührenden Beweismethode auf direktem Wege bewiesen. Indessen ist sein Beweis nicht allgemeingültig, da er implizit die Holomorphie von f in $\overline{\Delta}_R(0)-[1,R]$ (für ein $R>1$) benutzt. Dies ist aber eine Beschränkung!

Die genaue Summationsmenge der geometrischen Reihe bestimmen wir im folgenden Korollar. Dazu vereinbaren wir noch

$$D_\gamma := \left\{ \zeta\in\overline{D} \mid \gamma\circ f^{-1}\left(\tfrac{1}{\zeta}\right) = 0 \right\}$$

3.1.3 Korollar

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$ ist genau dann (f,g)-summierbar (und zwar zur Summe $\frac{1}{1-\zeta}$ ), wenn $\zeta \in D\cup D_\gamma$ oder $\zeta \in \partial D-\{1\}$ und $\alpha > 1$.

Beweis: Wir können uns auf die Werte $\zeta\in\partial D-\{1\}$ beschränken. Dann hat $\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta^{\nu} z^{\nu}$ in $w_0 := f^{-1}(\frac{1}{\zeta})$ einen Pol erster Ordnung. Falls $\zeta\notin D_\gamma$ ist daher die

Reihe (f,g)-summierbar genau dann, wenn $\alpha > 1$ (Satz 2.1.5). Für $\zeta \in D_\gamma$ ist $\gamma \cdot \Phi \circ f$ holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$ und $\Phi$ stetig in 1; folglich ist die Aussage, vermöge Korollar 2.1.4, richtig. &

Um einen größeren Vorrat an (f,g)-summierbaren Reihen zu bekommen, betrachten wir die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+b}{n} \zeta^n = (1-\zeta)^{-b-1} =: \Phi(\zeta)$$

für $\mathrm{Re}(b) > -1$. ( $\Phi = \Phi_f$ sei die analytische Fortsetzung des relevanten Funktionselements gemäß den einleitenden Bemerkungen). Genau wie im Beweis zu Satz 3.1.2 erhalten wir kompakte (f,g)-Summierbarkeit in D.

Mit geringfügigen Abänderungen können wir auch den Beweis zum obigen Korollar übertragen (Satz 2.1.5 im Sinne von Bemerkung 2.1.12). Daher gilt

3.1.4 Korollar

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+b}{n} \zeta^n$ ist (f,g)-summierbar genau dann, wenn $\zeta \in \partial D-\{1\}$ und $\alpha + n_\zeta > 1 + \mathrm{Re}\, b$ oder $\zeta \in D$. ($n_\zeta$ : Nullstellenordnung von $\gamma$ in $f^{-1}(\frac{1}{\zeta})$).

Wir haben bisher stets mit der von f, genauer gesagt, von der geometrischen Form des Bildgebietes f(E), abhängigen analytischen Fortsetzung $\Phi = \Phi_f$ gearbeitet.
Meist ist man jedoch an der analytischen Fortsetzung eines Funktionskeims in dessen Mittag-Leffler Stern S interessiert. Diese erhalten wir sicher dann, wenn f(E) die Strecke $[0,1[$ enthält. In diesem Fall ist nämlich eine (f,g)-summierbare Reihe nach Satz 2.1.1 zum selben Wert $A^* = A^*(0,[0,1[\,)$-summierbar.

Um zu einer übersichtlichen Darstellung des Summationsgebietes einer Potenzreihe $\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ zu kommen, beschränken wir uns in einem letzten Satz über holomorphe Fortsetzungen in den Mittag-Leffler Stern S hinein, auf bezüglich O sternförmige Gebiete $f(E)$.

3.1.5 Satz (vgl. Knopp [13], Satz 1, S. 323; Perron [16], Satz 9, S. 170)

Sei $f(E)$ sternförmig bezüglich O. Dann ist die Reihe $\sum a_n \zeta^n$ in $D^* := \bigcap_{a \in \partial S} a \cdot D$ kompakt $(f,g)$-summierbar zum Wert $\Phi(\zeta)$.

Beweis: Nach Satz 3.1.1 müssen wir nur nachweisen, daß $\Phi$ für jedes $\zeta \in D^*$ holomorph ist auf $\zeta \cdot f(\bar{E})$. Dazu genügt es jeweils $\zeta \cdot f(\bar{E}) \subset S$ zu zeigen.
Wir haben $\zeta \in a \cdot D$ für alle $a \in \partial S$ und wegen der vorausgesetzten Sternförmigkeit von $f(E)$ auch $\zeta / \vartheta a \in D$ für alle $a \in \partial S$, $\vartheta \geq 1$. Für jedes $z \in f(\bar{E})$ ist $\frac{1}{z} \in D$ und somit $\frac{\zeta}{\vartheta \cdot a} \neq \frac{1}{z}$, also $\zeta z \neq \vartheta a$ für alle $a \in \partial S, \vartheta \geq 1$.
Folglich bleibt nur $\zeta z \in S$. &

Den eigentlich nur auf Euler-Verfahren abzielenden Beweis von Perron und Knopp konnten wir voll übernehmen.

Abschließend gelangen wir zu einer Beschreibung von äquivalenten Gronwall-Verfahren.

3.1.6 Satz

Zwei Gronwall-Verfahren $(f_1, g_1)$, $(f_2, g_2)$ sind äquivalent höchstens dann, wenn

$$f_1 = f_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \text{ und } \frac{\gamma_2(w)}{\gamma_1(w)} \neq 0, \ \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)} \neq 0 \text{ für alle } w \in \partial E$$

Beweis: Mit Satz 3.1.2 bezeichnen wir das (offene) Summationsgebiet der geometrischen Reihe mit $D_1$ bzw. $D_2$. Es gilt notwendig $D_1 = D_2$. Also $f_1(\bar{E}) = f_2(\bar{E})$, und damit $f_1(E) = f_2(E)$. Nun ist $f_1^{-1} \circ f_2 =: f$ ein nullpunkttreuer Automorphismus der Einheitssphäre.

Zweimalige Anwendung des Schwarzschen Lemmas ergibt für alle $w \in E$

$$|w| = \left| f^{-1} \circ f(w) \right| \leq \left| f(w) \right| \leq |w|$$

Daher existiert ein $t \in [0, 2\pi]$ mit $f(w) = e^{it} \cdot w$ für alle $w \in E$. Aufgrund der Stetigkeit von f in 1 mit $f(1) = 1$ folgt daraus $f = id$. Also ist $f_1 = f_2$.

Sei nun $\xi \neq 1$ ein Punkt auf dem Rand von $D_1 = D_2$ für den $\gamma_1 \circ f^{-1}(\frac{1}{\xi}) \neq 0 \neq \gamma_2 \circ f^{-1}(\frac{1}{\xi})$. Solche Punkte gibt es, weil die Nullstellen von $\gamma_1$ und $\gamma_2$ auf $\partial E$ nach dem Identitätssatz isoliert liegen.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+b-1}{n}$ wird nach Korollar 3.1.4 durch die beiden Verfahren summiert genau dann, wenn $\alpha_1 > b$ und $\alpha_2 > b$. D. h. aber $\alpha_2 > \alpha_1 - (\alpha_1 - b)$ und $\alpha_1 > \alpha_2 - (\alpha_2 - b)$. Für $b \to \alpha_1 -$, bzw. $b \to \alpha_2 -$ erhalten wir daher $\alpha_2 \geq \alpha_1$ und $\alpha_1 \geq \alpha_2$, also $\alpha_1 = \alpha_2$.

Um die Notwendigkeit der letzten Bedingung zu verifizieren, sei $\xi \neq 1$ ein Randpunkt von $D_1 = D_2$ mit $\dfrac{\gamma_2 \circ f^{-1}(\frac{1}{\xi})}{\gamma_1 \circ f^{-1}(\frac{1}{\xi})} = 0$

Wenn wir die Nullstellenordnungen von $\gamma_1$ bzw. $\gamma_2$ in $f^{-1}(\frac{1}{\xi})$ mit $n_1$ bzw. $n_2$ bezeichnen, gilt demnach $n_2 > n_1$.

Gemäß Korollar 3.1.4 ist nun $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+b-1}{n} \xi^n$ für $b = \alpha_1 + \frac{n_1 + n_2}{2}$ zwar $(f_2, g_2)$-summierbar (wegen $\alpha_2 + n_2 > b$), aber nicht $(f_1, g_1)$-summierbar (wegen $\alpha_1 + n_1 < b$).

Ebenso behandelt man $\gamma_1 / \gamma_2$. &

Aufgrund dieses Satzes können wir für $f_1 \neq f_2$ oder $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alle Aussagen der Form $(f_1, g_1) \subset (f_2, g_2)$ ergänzen um $(f_1, g_1) \neq (f_2, g_2)$.

Nach Korollar 2.2.7 sind die im Satz 3.1.6 aufgeführten Bedingungen zusammen hinreichend für die Äquivalenz zweier (f, g)-Verfahren, wenn $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_0^*$. Unter Berücksichtigung von Korollar 2.2.8 erhalten wir daher

3.1.7 Korollar

Für $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_0^*$ gilt

$$(f_1, g_1) \approx (f_2, g_2) \iff f_1 = f_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{und}$$

$$\frac{\gamma_2(w)}{\gamma_1(w)} \neq 0 \neq \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)} \text{ für alle } w \in \partial E$$

Für $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}^*$ haben wir

$$(f_1, g_1) \approx (f_2, g_2) \iff f_1 = f_2 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

## 3.2 Multiplikationssätze

Für die Aussagen dieses kurzen Abschnitts finden sich in der Literatur über Gronwall-Verfahren keine Belege. Die Beweise sind indes kanonisch.

### 3.2.1 Satz

Es gelte $(f,g_1)-\sum p_\nu = P$, $(f,g_2)-\sum q_\nu = Q$.
Das Cauchy-Produkt der beiden Reihen ist dann $(f,g_1\cdot g_2)$-summierbar zur Summe $P\cdot Q$.

Beweis: Wir haben $P_n \to P$, $Q_n \to Q$, wobei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu = \frac{1}{g_1(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} P_n w^n \quad , \; z = f(w)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu = \frac{1}{g_2(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} Q_n w^n$$

Die hier links stehenden Potenzreihen sind in einem hinreichend kleinen Kreis $\Delta_r(0) \neq \emptyset$ um den Ursprung absolut konvergent; die rechten Seiten konvergieren sogar für $w \in E$ absolut.
Mit der Bezeichnung $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n = g(w) := g_1(w)\cdot g_2(w)$ können wir daher folgern:

$$\frac{1}{g(w)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu q_{n-\nu} z^n$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} q_\nu z^\nu$$

$$= \frac{1}{g_1(w)g_2(w)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{(1)} b_{n-}^{(2)} P\, Q_{n-}\, w^n$$

für alle $z \in \Delta_r(0)$. Demnach besteht zwischen den Gronwall-Transformierten der drei Reihen $\sum p_\nu$, $\sum q_\nu$ und $\sum p_\nu \cdot \sum q_\nu$ die Beziehung

$$U_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_\nu^{(1)} b_{n-\nu}^{(2)}}{b_n} P_\nu Q_{n-\nu}$$

Durch $a_n := \frac{b_\nu^{(1)} b_{n-\nu}^{(2)}}{b_n}$ für $0 \leq \nu \leq n$, $a_n := 0$ für $\nu > n$ definieren wir die Transformationsmatrix A. Sie erweist sich als permanent, denn mit $b_n \approx \frac{\gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1}$ etc. gelten

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu} = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \frac{b_\nu^{(1)}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_1)} n^{\alpha_2-\alpha} (1+o(1)) \right) = 0$, $\nu = 0,1,2\ldots$

(ii) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$, nach Definition von $b_n$

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| < \infty$

Das letztere beweist man so: Wegen $\frac{b_n}{A_n^{(\alpha)}} \to \gamma(1) \neq 0$ etc. existieren $K$, $K_1$, $K_2 > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \geq KA_n^{(\alpha)}$, $|b_n^{(1)}| \leq K_1 A_n^{(\alpha_1)}$, $|b_n^{(2)}| \leq K_2 A_n^{(\alpha_2)}$ für alle $n > N$. Für $n > 2N$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| &= \sum_{\nu=0}^{N} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu=N+1}^{n-N-1} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu=n-N}^{n} |a_{n\nu}| \\
&< \sum_{\nu=0}^{N} |a_{n\nu}| + \frac{K_1 K_2}{K} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu^{(\alpha_1)} A_{n-\nu}^{(\alpha_2)}}{A_n^{(\alpha)}} + \sum_{\nu=n-N}^{n} |a_{n\nu}| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \left( |a_{n\nu}| + |a_{n,n-\nu}| \right) + \frac{K_1 K_2}{K}
\end{aligned}$$

Analog zu (i) können wir auch

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,n-\nu} = 0$, $\nu = 0,1,2\ldots$

beweisen. Folglich ist $\sum\limits_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = O(1)$ für $n \to \infty$. Nach einem bekannten Satz (vgl. Zeller - Beekmann [22], Satz 39 II, S. 72 oder Knopp [20], Kap. II, Satz 6, S. 76) liefert die Permanenz von A zusammen mit der Eigenschaft (iv) die Aussage $U_n \to P.Q.$ &

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes können wir eine allgemeinere Aussage beweisen.

3.2.2 Satz

Es gelte $(f_1, g_1) - \sum p_\nu = P$, $(f_2, g_2) - \sum q_\nu = Q$; ferner seien $g \in \mathfrak{G}$, $f \in \mathfrak{F}$ mit $\lambda > \lambda^* := \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ und $f(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1(E) \cap f_2(E)$.
Dann ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\sum p_\nu$ und $\sum q_\nu$ $(f,g)$-summierbar zur Summe P.Q.

Beweis: Nach Satz 2.1.1 ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu$ holomorph in $f_1(E)$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu$ holomorph in $f_2(E)$; beide Potenzreihen sind also holomorph auf $f(\bar{E}) - 1$. Ferner gelten $A^*(\frac{\pi}{2\lambda_1}, W) - \sum p_\nu = P$ und $A^*(\frac{\pi}{2\lambda_2}, W) - \sum q_\nu = Q$ für alle $W \in \mathcal{W}^0(0,1)$, $|W| \subset f(E)$. Wir können einen Winkel $\theta$ so wählen, daß $\lambda \cdot \theta > \frac{\pi}{2}$ und $\lambda^* \cdot \theta < \frac{\pi}{2}$. Dann sind beide Reihen $A^*(\theta, W)$ summierbar zum richtigen Wert. Mit Satz 2.1.3 finden wir daher $(f, (1-w)^{-\delta/2}) - \sum p_\nu = P$ und $(f, (1-w)^{-\delta/2}) - \sum q_\nu = Q$ für jedes $\delta > 0$. Satz 3.2.1 liefert nun die $(f, (1-w)^{-\delta})$-Summierbarkeit des Produktes der beiden Reihen zur Summe P.Q.
Wir haben $g(w) = \gamma(w)(1-w)^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$; nach 1.2.1 und 1.2.2 ist die Reihe $\sum \beta_n$ für genügend kleine $\delta > 0$ $C_{\alpha-\delta-1}$-summierbar. Daher gilt, Satz 2.2.1 zufolge, $(f, (1-w)^{-\delta}) \subset (f,g)$. &

Satz 3.2.1 hat noch eine weitere Konsequenz:

3.2.3 Satz

Sei $\sum p_\nu$ $(f,g)$-summierbar zur Summe P.
Ist dann $(\tilde{f}, \tilde{g}) - \sum q_\nu = Q$ mit $\tilde{\lambda} < \lambda$ und $f(\bar{E}) - \{1\} \subset \tilde{f}(E)$, so gilt

$$(f, g \cdot (1-w)^{-\delta}) - (\sum p_\nu \cdot \sum q_\nu) = P \cdot Q \quad \text{für jedes } \delta > 0.$$

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes können wir eine allgemeinere Aussage beweisen.

3.2.2 Satz

Es gelte $(f_1,g_1)-\sum p_\nu = P$, $(f_2,g_2)-\sum q_\nu = Q$; ferner seien $g \in \mathfrak{G}$, $f \in \mathfrak{F}$ mit $\lambda > \lambda^* := \max\{\lambda_1,\lambda_2\}$ und $f(\bar{E})-\{1\} \subset f_1(E) \cap f_2(E)$.
Dann ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen $\sum p_\nu$ und $\sum q_\nu$ $(f,g)$-summierbar zur Summe $P.Q$.

Beweis: Nach Satz 2.1.1 ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu$ holomorph in $f_1(E)$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q_\nu z^\nu$ holomorph in $f_2(E)$; beide Potenzreihen sind also holomorph auf $f(\bar{E})-1$. Ferner gelten $A^*(\frac{\pi}{2\lambda_1},W)-\sum p_\nu = P$ und $A^*(\frac{\pi}{2\lambda_2},W)-\sum q_\nu = Q$ für alle $W \in \mathcal{W}^0(0,1)$, $|W| \subset f(E)$. Wir können einen Winkel $\theta$ so wählen, daß $\lambda\cdot\theta > \frac{\pi}{2}$ und $\lambda^*\cdot\theta < \frac{\pi}{2}$. Dann sind beide Reihen $A^*(\theta,W)$ summierbar zum richtigen Wert. Mit Satz 2.1.3 finden wir daher $(f,(1-w)^{-\delta/2})-\sum p_\nu = P$ und $(f,(1-w)^{-\delta/2})-\sum q_\nu = Q$ für jedes $\delta > 0$. Satz 3.2.1 liefert nun die $(f,(1-w)^{-\delta})$-Summierbarkeit des Produktes der beiden Reihen zur Summe $P.Q$.
Wir haben $g(w) = \gamma(w)(1-w)^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$; nach 1.2.1 und 1.2.2 ist die Reihe $\sum \beta_n$ für genügend kleine $\delta > 0$ $C_{\alpha-\delta-1}$-summierbar. Daher gilt, Satz 2.2.1 zufolge, $(f,(1-w)^{-\delta}) \subset (f,g)$. &

Satz 3.2.1 hat noch eine weitere Konsequenz:

3.2.3 Satz

Sei $\sum p_\nu$ $(f,g)$-summierbar zur Summe $P$.
Ist dann $(\tilde{f},\tilde{g})-\sum q_\nu = Q$ mit $\tilde{\lambda} < \lambda$ und $f(\bar{E})-\{1\} \subset \tilde{f}(E)$, so gilt

$$(f,g\cdot(1-w)^{-\delta}) - (\sum p_\nu \cdot \sum q_\nu) = P\cdot Q \quad \text{für jedes} \quad \delta > 0.$$

Beweis: Nach Satz 2.1.6 ist $(f,(1-w)^{-\delta}) - \sum q_\nu = Q$ für jedes $\delta > 0$. Daher folgt die Aussage aus Satz 3.2.1. &

Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes können wir, zwar ziemlich ungenau, aber das Wesentliche doch treffend, auch so formulieren: Das Produkt der beiden Reihen $\sum p_\nu$ und $\sum q_\nu$ ist "fast" (f,g)-summierbar (zur Summe $P \cdot Q$).

## 3.3 Existenz- und Charakterisierungssätze

Im Anschluß an Satz 3.2.2 stellt sich die Frage, wann überhaupt eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ existiert mit $f(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1(E) \cap f_2(E)$ und $\lambda > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ .
Die Antwort liefert i. w. schon der folgende Satz:

3.2.1 Satz

Es gibt genau dann ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $f(\bar{E}) - \{1\} \subset D \subset E$ , wenn

(i) $\exists\, \varrho > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}:\quad S(\theta) \cap \Delta_\varrho(1) \subset D$ und

(ii) D enthält ein Gebiet D' mit $0 \in D'$ und $1-\varrho \in D'$

Im Falle der Existenz gilt $\lambda_f \cdot \theta > \frac{\pi}{2}$

Beweis: Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen ist leicht einzusehen. Für jedes $f \in \mathfrak{F}$ ist nämlich $f(E)$ ein Gebiet, und wegen $1-f(w) = (1-w)^{1/\lambda}\psi(w)$, $\psi(1) > 0$, $\psi$ stetig in 1, gibt es zu jedem Winkel $0 < \theta < \frac{\pi}{2\lambda}$ ein $\varrho > 0$, so daß $S(\theta) \cap \Delta_\varrho(1) \subset f(E)$.
Wir beweisen jetzt den hinreichenden Teil.
Zunächst existiert in D' ein Weg W' mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $1-\varrho$ . Es ist stets möglich W' so zu wählen, daß der Weg $W := W' + [1-\varrho, 1]$ einfach ist. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist daher

$$(1) \qquad D^* := \bigcup_{\zeta \in |W|} \Delta_\varepsilon(\zeta) \quad \cap S(\theta) \quad \subset D$$

ein einfach-zusammenhängendes Gebiet.
Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert nun eine biholomorphe, nullpunkttreue Abbildung $h^*: E \longrightarrow D^*$. Wir können $h^*$ in den Randpunkt +1 hinein stetig fortsetzen (dies erlaubt uns eine Variante des eben benutzten Satzes) mittels $h^*(1) := 1$ (vgl. Behnke-Sommer [18], Satz 44, S. 370). Ein weiterer Satz aus der Theorie der konformen Abbildungen (Behnke-Sommer [18], Satz 52, S. 378) ermöglicht

uns jetzt eine Entwicklung

(2) $\quad 1-w = a_1(1-z)^{\lambda^*} + a_2(1-z)^{2\lambda^*} + \dots , \quad a_1 \neq 0,$

wobei wir $\frac{\pi}{2\lambda^*} := \theta$ und $z = h^*(w)$ gesetzt haben.
Die Koeffizienten $a_n, n \in \mathbb{N}$, sind abhängig von den Zweigen $(1-z)^{\lambda^*}$ der Funktion $\exp(\lambda^* \log(1-z))$ bestimmt.
Wir rechnen, wie stets, mit dem Hauptwert.
Für $w \longrightarrow 1$, $w < 1$ muß auch z sich der reellen Achse nähern und gegen 1 streben. Dies zieht $a_1 > 0$ nach sich.
Nun definieren wir $h^*(w) := 1-\left[a_1^{-1}(1-w)\right]^{1/\lambda^*}$ für alle $w \in \mathbb{C}-E$. In Verbindung mit (2) heißt dies

(3) $$\Psi^*(w) := \frac{1-h^*(w)}{(1-w)^{1/\lambda^*}}$$

ist stetig in 1 und $\Psi^*(1) = a_1^{1/\lambda^*} > 0$.
Wir betrachten jetzt die Komposition $f := h^* \circ h$, worin $h(w) := 1-(1-w)^{1/2}$. Wie man leicht verifiziert, ist f holomorph auf $\bar{E}-\{1\}$ und stetig in 1.
Ferner gelten $f(\bar{E})-\{1\} \subset h^*(E) \subset D$ und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Schließlich erhalten wir, ähnlich wie in Lemma 2.3.8,

(4) $$1-f(w) = (1-w)^{1/2\lambda^*} \, \Psi^* \circ h(w)$$

Also erfüllt f die Bedingungen 1.3.1 (i), (ii) und (iii), womit alles gezeigt ist. &

Jetzt können wir die aufgeworfene Frage vollständig beantworten. Darüberhinaus formulieren und beweisen wir für beliebige Indexmengen I:

3.3.2 Satz

Zu einer Familie $((f_i, g_i) \mid i \in I)$ von Gronwall-Verfahren gibt es genau dann ein stärkeres Verfahren $(f,g)$, wenn

(i) $\sup_{i \in I} \lambda_i < \infty$ und

(ii) die Menge $D := \bigcap_{i \in I} f_i(E)$ enthält ein Gebiet D' mit $0 \in D'$ und $1 \in \partial D'$.

Beweis: Nach Definition von D ist (i) augenscheinlich äquivalent zu 3.3.1 (i). Daher gilt (ii) dann und nur dann, wenn 3.3.1 (ii) zutrifft. Folglich existiert ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $f(\bar{E}) - \{1\} \subset D$ genau dann, wenn (i) und (ii) erfüllt sind.

Im Beweis zu Satz 3.3.1 haben wir insbesondere $\lambda = \lambda_f = 2\lambda^*$ mit $\frac{\pi}{2\lambda^*} = \theta$ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ gezeigt. Da a.a.O. sicher $\theta \cdot \sup_{i \in I} \lambda_i < \frac{\pi}{2}$ gilt, folgt sofort $\lambda > \sup_{i \in I} \lambda_i$ . Wegen Satz 2.1.6 bedeutet dies

$$(f,g) \supset (f_i,g_i) \quad \text{für alle} \quad i \in I \qquad \&.$$

Für endliche Mengen $I$ ist die Bedingung $\sup_{i \in I} \lambda_i < \infty$ natürlich immer erfüllt.

Unter Heranziehung von Satz 2.4.1 bekommen wir eine interessante Charakterisierung der eingangs gestellten Frage.

3.3.3 Satz

Zu zwei Gronwall-Verfahren $(f_1,g_1)$, $(f_2,g_2)$, gibt es ein stärkeres Verfahren $(f,g)$ genau dann, wenn $(f_1,g_1)$ und $(f_2,g_2)$ verträglich sind.

Beweis: Wenn ein stärkeres Verfahren $(f,g)$ existiert, dann gilt zwingend $f(E) \subset f_1(E) \cap f_2(E)$. Da $f(E)$ ein Gebiet ist, haben wir nach Satz 2.4.1 bereits Verträglichkeit von $(f_1,g_1)$ und $(f_2,g_2)$. Umgekehrt folgt aus dem letzteren die Existenz eines Weges $W \in \mathcal{W}(0,1)$ mit $|W| \subset f_1(E) \cap f_2(E)$. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ und $\lambda^* > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ erfüllt daher

$$D' := \bigcup_{\zeta \in |W|} \Delta_\varepsilon(\zeta) \quad \cap \; S\left(\frac{\pi}{2\lambda^*}\right)$$

die Bedingung 3.3.2 (ii). &

3.3.4 Bemerkung

Wir können den Satz 3.3.3 natürlich auch für endliche Familien von Gronwall-Verfahren aussprechen. Der Beweis läuft völlig analog. Indes gilt eine entsprechende Aussage für unendliche Familien von (f,g)-Verfahren nicht mehr. Mit $f_\delta(w) := 1-(1-w)^\delta$, $0<\delta\leq 1$, sind nämlich die Gronwall-Verfahren $(f_\delta, g_\delta)$, $0<\delta\leq 1$, ($g_\delta \in \mathbb{G}$ beliebig) alle miteinander verträglich, da ja $[0,1[\ \subset f_\delta(E)$ für alle $\delta \in\ ]0,1]$. Wegen $\sup\limits_{\delta\in]0,1]} \lambda_\delta = \infty$ existiert dagegen kein Gronwall-Verfahren (f,g) das stärker ist als alle Verfahren $(f_\delta, g_\delta)$, $0<\delta\leq 1$.

Nach Satz 2.4.1 ist (id,g) verträglich mit jedem Gronwall-Verfahren $(\tilde{f},\tilde{g})$, denn $\tilde{f}(E)$ ist ein Gebiet (also zusammenhängend) und es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
Satz 3.1.1 versetzt uns in die Lage, auch die Umkehrung dieser Aussage zu beweisen.

3.3.5 Satz

Ein Gronwall-Verfahren (f,g) ist verträglich mit allen Gronwall-Verfahren genau dann, wenn

$$f = id$$

Beweis: Den hinreichenden Teil haben wir eben gezeigt. Um die Notwendigkeit der Bedingung $f = id$ zu verifizieren, gehen wir von der gegenteiligen Annahme $f \neq id$ aus. Dann gibt es ein $z_o \in E$ mit $z_o \notin f(\bar{E})$ und $0 < t_o := \arg z_o < 2\pi$. Weiter existiert ein $\rho > 0$, so daß $\Delta_\rho(z_o) \subset E-f(\bar{E})$. Wir definieren einen Weg $W := W_1+W_2+W_2$ (s. Fig. 5) wobei

$$\begin{array}{llll} W_1: & \zeta = \tau\cdot e^{it_o}, & & 0\leq \tau \leq |z_o| \\ W_2: & \zeta = |z_o|\, e^{it}, & & t_o \leq t \leq 2\pi \\ W_3: & \zeta = x, & & |z_o| \leq x \leq 1 \end{array}$$

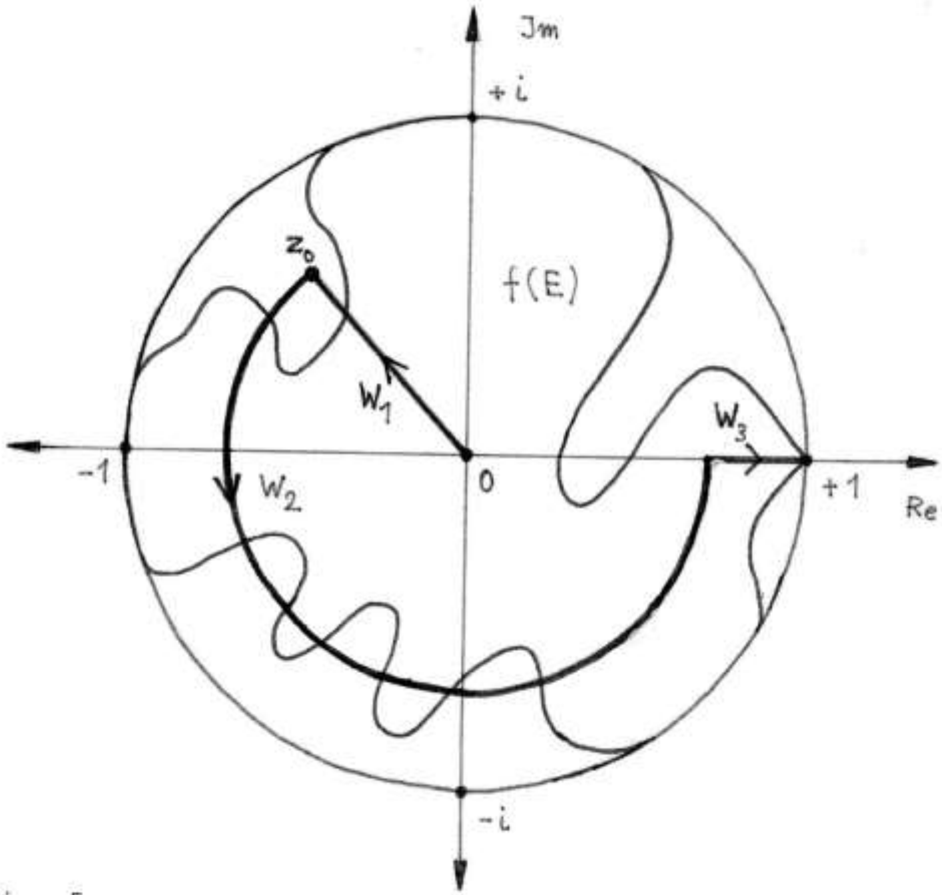


Fig. 5

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \rho$ erfüllt jetzt

$$D := \bigcup_{\xi \in |W|} \Delta_\varepsilon(\xi) \cap E$$

die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 3.3.1. Daher gibt es ein $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\tilde{f}(\bar{E}) - \{1\} \subset D$. Jeder Weg $\tilde{W}$ von 0 nach 1 in $\tilde{f}(E) \cup \{1\}$ ist deshalb auch in $D \cup \{1\}$; insbesondere gibt es Punkte $\xi \in |\tilde{W}|$ mit $\xi \in \Delta_\varepsilon(z_0) \subset E - f(\bar{E})$. Folglich existiert in $\tilde{f}(E) \cap f(E) \cup \{1\}$ kein Weg von 0 nach 1, womit sich (f,g), wegen Satz 2.4.1, als nicht verträglich mit $(\tilde{f},\tilde{g})$ erweist. Daher ist f=id notwendig für die Verträglichkeit von (f,g) mit $\bigcup \{(\tilde{f},\tilde{g}) \mid \tilde{f} \in \mathfrak{F}, \tilde{g} \in \mathfrak{G}\}$ . &

Wie die Sätze 2.1.1 und 2.1.3 lehren, bestehen zwischen Gronwall-Verfahren und den (verstärkten) komplexen Abel-Verfahren enge Beziehungen. Einen weiteren Satz in dieser Richtung können wir unter entscheidender Verwendung von 3.3.1 beweisen:

3.3.6 Satz

Die Vereinigung aller Gronwall-Verfahren (f,g) ist gleichstark wie die Vereinigung aller Abel-Verfahren $A^*(\theta, W)$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $W \in \mathcal{W}(0,1)$.

Beweis: Wir vereinbaren $\Phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$. Sei $\sum u_\nu$ $A^*(\theta, W)$-summierbar für ein $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $W \in \mathcal{W}(0,1)$. Dann ist $\Phi$ holomorph in einem Gebiet $D \supset |W|$ mit $0 \in D$, $1 \in \partial D$. Weiter ist $S(\theta_1) \cap \Delta_\varrho(1) \subset D$ für ein $0 < \theta_1 < \theta$ und hinreichend kleines $\varrho > 0$. Folglich existiert nach Satz 3.1.1 ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(\bar{E}) - \{1\} \subset D$ und $\lambda \cdot \theta_1 > \frac{\pi}{2}$. Daher ist die Reihe $\sum u_\nu$ (f,g)-summierbar aufgrund von Satz 2.1.3. Für die umgekehrte Beweisrichtung brauchen wir nur auf Satz 2.1.1 zu verweisen. &

Da eine $A^*(\theta)$-summierbare Reihe auch $A^*$ summierbar ist, haben wir nach 3.3.5 insbesondere $\bigcup\{(f,g) \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\} \subset \bigcup A^*$. Diese Inklusion ist sogar echt: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n := (1-\zeta)\exp\left(\frac{i}{1-\zeta}\right)$. Die Reihe ist konvergent für alle $\zeta \in E$. Wir erhalten $A^*\text{-}\sum a_n = \lim_{x \to 1-} (1-x)\exp(i/(1-x)) = 0$.

Mit $\zeta = 1 - e^{-i\varphi} \cdot \tau^{-1}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ ($\varphi$ fest), $\tau \to \infty$ geht $\zeta$ in $S(2\varphi)$ gegen 1. Es gilt weiter

$$\left|(1-\zeta)\exp\left(\frac{i}{1-\zeta}\right)\right| = \left|-\frac{e^{-i\varphi}}{\tau}\exp(-i\tau\cos\varphi + \tau\sin\varphi)\right|$$

$$= \tau^{-1}\exp(\tau\sin\varphi) \underset{\tau \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

Daher ist die Reihe $\sum a_n$ für kein $\theta > 0$ $A^*(\theta)$ - limitierbar, und folglich auch durch kein Gronwall - Verfahren summierbar. Somit haben wir gezeigt :

3.3.7 Satz

Es gilt $\quad \bigcup \{(f,g) \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathbb{G}\} \subsetneq \bigcup \{A^*(W) \mid W \in \mathcal{W}(0,1)\}$

## 3.4 $A^*_\varkappa(\theta, W)$ - Limitierbarkeit. Produkte von (f,g)-Verfahren.

Zunächst definieren wir die verstärkten Abel- $\varkappa$ -Verfahren $A^*_\varkappa(\theta, W)$, $\varkappa > -1$, $0 < \theta \leq \pi$, $W \in \mathcal{W}(0,1)$.
Eine Folge $(s_n)$ heißt $A^*_\varkappa(\theta, W)$ - limitierbar zum Wert s dann und nur dann, wenn gilt

3.4.1 (i) $(1-z)^{\varkappa+1} \sum_{n=0} \binom{n+\varkappa}{n} s_n z^n$ ist holomorph in $z = 0$ und läßt sich längs des Weges W analytisch fortsetzen. Die zugehörige Fortsetzung bezeichnen wir mit $\Phi_\varkappa$ .

(ii) Es gibt ein $\varrho > 0$, so daß $\Phi_\varkappa$ im Innern von $S(\theta) \cap \Delta_\varrho(1)$ holomorph ist.

(iii) Für jedes $\theta' < \theta$ geht $\Phi_\varkappa(z)$ gegen s, wenn $z \to 1$ in $S(\theta')$.

Analog zu 1.1.14 führen wir abweichend hiervon die $A^*_\varkappa(W) = A^*_\varkappa(0, W)$-Limitierbarkeit ein (statt (ii) verlangen wir Holomorphie für $z \in S(0) \cap \Delta_\varrho(1)$ : $\Phi_\varkappa(z) \to s$ für $z \to 1$ in $S(0)$. (vgl. Borwein [7], S. 318, wo ähnliche Verfahren definiert werden).

Die im Anschluß an 1.1.14 getroffenen Vereinbarungen wollen wir - mutatis mutandis - ebenfalls übernehmen.

Als erstes werden wir jetzt ein Inklusionsbeziehung der Art $(f,g) \subset A^*_\varkappa(\theta, W)$ beweisen. Einen Satz in dieser Richtung hat Bustoz aufgestellt (vgl. [8], Theorem 1, S. 785), doch verwendet er eine andere Notation und benötigt zusätzliche Voraussetzungen über die Funktion f (vgl. [8], S. 785 oben). Bustoz beweist seinen Satz eigentlich nur für $\varkappa \in \mathbb{N}^0$ und erschließt den allgemeinen Fall $\varkappa > -1$ mit Hilfe der von Borwein stammenden Aussage "$A_\varkappa \subset A_\mu$ für $-1 < \mu < \varkappa$ " (vgl. [7], Theorem 2, S. 319; zur Schreibweise verweisen wir auf den Anhang), die er indes in der durch seine Notation erzwungenen Form unbewiesen läßt. Wenngleich der Richtigkeit des Bustozschen Satzes für alle $\varkappa > -1$ nichts entgegensteht, so muß man den Beweis für $\varkappa \notin \mathbb{N}^0$ wohl als nicht erbracht ansehen.

Auch wir werden den in Rede stehenden Satz nur für $\varkappa \in \mathbb{N}^0$ verifizieren, geben allerdings einen neuen und kürzeren Beweis, und verschärfen den Satz insofern, als daß wir auf die von Bustoz eingeführten Voraussetzungen verzichten.

Wenn wir Satz 2.1.1 berücksichtigen, so sehen wir, daß der noch zu formulierende Satz eine triviale Folgerung aus dem nächsten, auch an sich interessanten, Vergleichssatz ist.

3.4.2 Satz [1)]

Seien $\varkappa \in \mathbb{N}^0$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ und $W \in \mathcal{W}(0,1)$. Dann gilt

$$A_0^*(\theta, W) \subset A_\varkappa^*(\theta, W)$$

mit Verträglichkeit.

Beweis: Die Folge $(s_n)$ sei $A_\varkappa^*(\theta, W)$-limitierbar zum Wert s. O. B. d. A. sei $s = 0$. Wir haben also für alle $\theta' < \theta$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \Phi_0(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow 1$ in $S(\theta')$.
Für alle $\theta'' < \theta'$ zeigen wir $\Phi_\varkappa(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow 1$ in $S(\theta'')$
Der Beweis beruht auf der folgenden Beziehung:

$$(1-z)^{\varkappa+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\varkappa}{n}s_n z^n = (1-z)^{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{n+\varkappa}{n}s_n - \binom{n-1+\varkappa}{n-1}s_{n-1}\right\}z^n$$

$$= (1-z)^{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{n+\varkappa}{n}(s_n - s_{n-1}) + \left[\binom{n+\varkappa}{n} - \binom{n-1+\varkappa}{n-1}\right]s_{n-1}\right\}z^n$$

[1)] Mit etwas mehr Aufwand läßt sich sogar " $A_\mu^*(\theta) \subset A_{\mu+\varkappa}^*(\theta)$ für $\mu > -1$, $\varkappa \in \mathbb{N}$ " beweisen.

$$= (1-z)^{\varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} a_n z^n + (1-z)^{\varkappa} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\varkappa-1}{n} s_{n-1} z^n$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\varkappa} (1-z)^{\nu} \sum_{n=\varkappa-\nu}^{\infty} \binom{n+\nu}{n} a_{n-\varkappa+\nu} z^n$$

Es gibt Konstanten $p_\nu^{(\mu)}$ , $0 \le \mu \le \nu \le \varkappa$ , so daß für $0 \le \nu \le \varkappa$

(2) $$\binom{n+\varkappa}{\nu} = p_\nu^{(0)} + p_\nu^{(1)} \cdot n + p_\nu^{(2)} \cdot n(n-1) + \cdots + p_\nu^{(\nu)} \cdot n(n-1)\cdots(n-\nu+1)$$

(Denn die linke Seite ist ein Polynom in $n$ vom Grade ,
als solches aber eindeutig durch die Basis
$(1, n, n(n-1), \ldots, n(n-1)\ldots(n-\nu+1))$ darstellbar)
Daher können wir folgern

$$\sum_{n=\varkappa-\nu}^{\infty} \binom{n+\nu}{n} a_{n-\varkappa+\nu} z^n = z^{\varkappa-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{\nu} a_n z^n$$

$$= z^{\varkappa-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu^{(\nu)} \cdot n(n-1)\cdots(n-\mu+1) a_n z^n$$

und erhalten mit (1)

$$\Phi_\varkappa(z) = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} (1-z)^{\nu} z^{\varkappa-\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\nu^{(\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\mu+1) a_n z^{n-\mu} z^{\mu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\varkappa} z^{\varkappa+\mu-\nu} (1-z)^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\nu^{(\mu)} \Phi_0^{(\mu)}(z)$$

Demnach erfüllt $\Phi_\varkappa$ die Bedingungen 3.4.1 (i) und (ii).

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $\varrho_0 > 0$ , so daß $|\Phi_0(z)| < \varepsilon$ für $z \in S(\theta') \cap \Delta_{\varrho_0}(1)$ . Der Randabstand eines $z \in S(\theta'')$, $1-z = \varrho e^{i\varphi}$ , im Sektor $S(\theta') \cap \Delta_{\varrho_0}(1)$ ist für $\varrho < \frac{\varrho_0}{2}$ gleich $\varrho \cdot \sin(\theta' - |\varphi|)$. Nach den Cauchyschen Ungleichungen für Ableitungen gilt daher

(5) $$|\Phi_0(z)| \le \frac{\mu! \cdot \varepsilon}{[\varrho \cdot \sin(\theta' - |\varphi|)]^{\mu}} < \frac{\mu! \cdot \varepsilon}{[\varrho \cdot \sin(\theta' - \theta'')]^{\mu}}$$

Damit ergibt sich für alle $z \in S(\theta'') \cap \Delta_{\rho_0/2}(1)$

$$
\begin{aligned}
|\Phi_{\varkappa}(z)| &\leq \sum_{\nu=0}^{\varkappa} |z|^{\varkappa+\mu-\nu} |1-z|^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} |p_{\nu}^{(\mu)}| \, |\Phi_0^{(\mu)}(z)| \\
&< \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \rho^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} |p_{\nu}^{(\mu)}| \frac{\mu! \cdot \varepsilon}{[\rho \cdot \sin(\theta'-\theta'')]^{\mu}} \\
&= \varepsilon \cdot \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \sum_{\mu=0}^{\nu} \mu! \frac{|p_{\nu}^{(\mu)}|}{[\sin(\theta'-\theta'')]^{\mu}} \rho^{\nu-\mu} \\
&< \varepsilon \cdot K
\end{aligned}
$$

Wir finden also $\Phi_{\varkappa}(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow 1$ in $S(\theta'')$. Da wir nun $\theta'$ beliebig nahe an $\theta$ und $\theta''$ beliebig nahe an $\theta'$ wählen können, ist alles gezeigt. &

In Verbindung mit Satz 2.1.1 haben wir somit bewiesen (man beachte $A^{*}(\theta, W) = A_0^{*}(\theta, W)$ ).

3.4.3 Satz (vgl. Bustoz [8], Theorem 1, S. 785)

Für alle $\varkappa \in \mathbb{N}^0$, $\theta \leq \frac{\pi}{2\lambda}$, $W \in \mathcal{W}(0,1)$ mit $|W| \subset f(E)$ gilt

$$(f,g) \subset A_{\varkappa}^{*}(\theta, W)$$

mit Verträglichkeit.

Der gegebene Beweis macht es offenkundig, daß dieser Satz keine über die grundlegenden Aussagen von 2.1.1 hinausgehende Erkenntnisse über Gronwall-Verfahren vermittelt.

Vermutlich ist der Satz 3.4.2 auch für nichtganze $\varkappa > 0$ richtig (vgl. Anhang, Satz A.2). Daher darf man vernünftigerweise die Gültigkeit von Satz 3.4.3 für $\varkappa > 0$ ebenfalls erwarten (vgl. Anhang, Satz A.7).

Wir behandeln nun Produkte von (f,g)-Verfahren; die Kenntnis des Vergleichssatzes 3.4.2 kommt uns dabei sehr zugute. Lediglich in zwei speziellen Fällen kommen wir ohne 3.4.2 aus:

3.4.4 Satz

Wir haben

(i) $(f_2,g_2)(f_1,g_1) = (f_1 \circ f_2, g_2)$, falls $g_1(w) = (1-w)^{-1}$

(ii) $(\mathrm{id},g_2)(f_1,g_1) \approx (f_1,(1-w)^{1-\alpha_1-\alpha_2})$, falls

$g_2 \in \mathfrak{G}^*$, $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$ und $\alpha_1+\alpha_2 > 1$

Beweis: (i). Wir gehen aus von den beiden Identitäten

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu [f_1(\xi)]^\nu = \frac{1}{g_1(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n^{(1)} \xi^n, \qquad \xi = f_2(w)$$

$$(1-f_2(w)) \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu^{(1)} [f_2(w)]^\nu = \frac{1}{g_2(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} U_n^{(2)} w^n$$

die nach Wahl von $g_1$ übergehen in

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu [f_1 \circ f_2(w)]^\nu = \frac{1}{g_2(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} U_n^{(2)} w^n$$

Damit ist bereits alles gezeigt.

(ii). Aufgrund von Korollar 2.2.7 ist $(\mathrm{id},g_2)$ äquivalent zu $(\mathrm{id},(1-w)^{-\alpha_2})$. Unter Berücksichtigung von $(f_1,g_1)$ $(f_1,g_1) = (\mathrm{id},(1-w)^{-\alpha_1})(f,(1-w)^{-1})$ ist deshalb die linke Seite in (ii) gleich $C_{\alpha_2-1} C_{\alpha_1-1} (f_1,(1-w)^{-1})$. Nun gilt aber $C_{\alpha_2-1} C_{\alpha_1-1} \approx C_{\alpha_1+\alpha_2-1}$, wenn $\alpha_1+\alpha_2 > 1$ (vgl. Zeller-Beekmann [22], Satz 54 III, S. 109). Daraus folgt die Aussage unmittelbar. &

Den nächsten Satz über Produkte von Gronwall-Verfahren beweisen wir unter entscheidender Verwendung von 3.4.2.

3.4.5 Satz

Wenn $f(\bar{E})-\{1\} \subset f_1 \circ f_2(E)$, $\lambda > \lambda_1 \lambda_2$ und $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(f,g) \supset (f_2,g_2)(f_1,g_1)$$

mit Verträglichkeit.

Beweis: Zunächst verweisen wir auf die im Beweis zu 3.4.4 aufgeschriebenen Identitäten (1). Es gelte $U_n^{(2)} \longrightarrow s$. Wir zeigen $(f,g)-\sum u_\nu = s$. Nach Satz 2.1.1 ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu^{(1)} \zeta^\nu$ holomorph in $f_2(E)$ und daher $\sum u_\nu z^\nu$ holomorph in $f_1 \circ f_2(E) \supset f(\bar{E})-\{1\}$ (s. Beweis zu Satz 3.4.2, Formel (4)). Ferner gilt $A^*(\theta)-\lim U_n^{(1)} = s$ für $\theta = \frac{\pi}{2\lambda_2}$ (wir unterdrücken die Angabe eines Weges W). Nach Satz 3.4.2 folgt $A^*_{\alpha_1-1}(\theta)-\lim U_n^{(1)} = s$, also

$$\frac{1}{g_1(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n^{(1)} \zeta^n \longrightarrow s \quad \text{für} \quad \zeta \longrightarrow 1 \text{ in } S(\theta)$$

(weil $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$ und $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ !). Mithin ist die Reihe $\sum u_\nu$ $A^*(\theta_o)$-summierbar zur Summe s für $\theta_o := \theta/\lambda_1$ (man beachte die Ecke von $f_1$ in 1 gemäß 1.3.1 (iii)). Wegen $\lambda \cdot \theta_o > \frac{\pi}{2}$ haben wir daher $(f,g)-\sum u_\nu = s$ als Folge von Satz 2.1.3. &

Bezüglich der Erweiterung dieses Satzes auf nichtganze $\alpha_1 \geq 1$ gilt das im Anschluß an Satz 3.4.3 Festgehaltene (vgl. Anhang, Satz A.8).

In Verbindung mit Satz 3.3.1 (s.a. Beweis zu Satz 3.3.2) gelangen wir zu der Feststellung, daß zu jedem Produkt $(f_2,g_2)(f_1,g_1)$ mit $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \mathbb{N}$, ein stärkeres Gronwall-Verfahren (f,g) existiert.

Abschließend wollen wir noch notwendige Bedingungen dafür angeben, daß das Produkt zweier Gronwall-Verfahren äquivalent bzw. gleich einem $(f,g)$-Verfahren ist. Im ersten Fall müssen wir $g_1$ wieder auf eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$ beschränken.

3.4.6 Satz

Wenn $(f_2,g_2)(f_1,g_1) \approx (f,g)$ und $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{N}$, dann gilt $f = f_1 o f_2$.

Beweis: Wir verweisen nochmals auf 3.4.4 (1). Speziell nehmen wir $u_\nu := \zeta^\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^0$ mit $\frac{1}{\zeta_0} \notin f_1 o f_2(\bar{E})$.
Dann ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ holomorph auf $f_1 o f_2(\bar{E})$ und deswegen $(1-\zeta)\sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu^{(1)} \zeta^\nu$ holomorph auf $f_2(\bar{E})-\{1\}$ und stetig in 1.
Also gilt $U_n^{(2)} \longrightarrow (1-\zeta_0)^{-1}$ nach 2.1.4.
Gehen wir andererseits von $\frac{1}{\zeta_0} \in f_1 o f_2(E)$ aus, so hat $\sum u_\nu z^\nu$ einen Pol in $f_1 o f_2(E)$ und daher $\sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu^{(1)} \zeta^\nu$ eine Polstelle in $f_2(E)$ (denn träfe letzteres nicht zu, dann hätte nach der Formel (4) im Beweis zu Satz 3.4.2 auch $\frac{1}{g_1(\zeta)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} U_n^{(1)} \zeta^n$ keine Polstelle in $f_2(E)$, und folglich $\sum u_\nu z^\nu$ keinen Pol in $f_1 o f_2(E)$; Widerspruch!)
Also divergiert $U_n^{(2)}$ unbeschränkt nach Satz 3.1.2. Der eben zitierte Satz liefert jetzt $f(E) = f_1 o f_2(E)$. Wie im Beweis zu 3.1.6 gezeigt, zieht dies $f = f_1 o f_2$ nach sich. &

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir im folgenden Satz $b_o = b_o^{(1)} = b_o^{(2)} = 1$ normieren.

3.4.7 Satz

Ist $(f_2,g_2)(f_1,g_1) = (f,g)$, so gilt notwendig

(i) $f'(0) = f_1'(0)\cdot f_2'(0)$

(ii) $b_n = b_n^{(1)} b_n^{(2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$

(iii) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$

- 83 -

Beweis: Um die ersten beiden Aussagen zu verifizieren, berechnen wir die Transformationsmatrix des Produkts der beiden Gronwall-Verfahren. Wir haben

$$(1) \qquad U_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{b_{n-\mu}^{(1)}}{b_n^{(1)}} c_{1,\mu}^{(\nu)} \right) u_\nu$$

$$(2) \qquad U_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{b_{n-\mu}^{(2)}}{b_n^{(2)}} c_{2,\mu}^{(\nu)} \right) \left( U_\nu^{(1)} - U_{\nu-1}^{(1)} \right)$$

(1) eingesetzt in (2) führt uns auf

$$U_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{(2,1)} u_k$$

wobei $\quad a_{nk}^{(2,1)} = \sum_{k \le \varkappa \le \mu \le \nu \le n} \frac{b_{\mu-\varkappa}^{(1)} \, b_{n-\nu}^{(2)}}{b_\mu^{(1)} \quad b_n^{(2)}} \left( c_{2,\nu}^{(\mu)} - c_{2,\nu}^{(\mu+1)} \right) c_{1,\varkappa}^{(k)}$

Andererseits gilt $a_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{b_{n-\nu}}{b_n} c_\nu^{(k)}$ für das Verfahren $(f,g)$. Nach Voraussetzung haben wir für alle $n \in \mathbb{N}^0$ die Gleichung $a_{nn}^{(2,1)} = a_{nn}$. Das bedeutet aber (Normierung beachten!):

$$\frac{c_{2,n}^{(n)} \cdot c_{1,n}^{(n)}}{b_n^{(1)} \cdot b_n^{(2)}} = \frac{c_n^{(n)}}{b_n}$$

Wegen $c_n^{(n)} = [f'(0)]^n = c_1^n$, $c_{1,n}^{(n)} = c_{1,n}^n$, $c_{2,n}^{(n)} = c_{2,n}^n$, ist

$$\frac{b_n}{b_n^{(1)} \cdot b_n^{(2)}} = \left( \frac{c_1}{c_{1,1} \cdot c_{2,1}} \right)^n$$

Nach Lemma 1.2.3 verhält sich die linke Seite asymptotisch wie $\frac{\gamma(1)}{\gamma_1(1) \cdot \gamma_2(1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot n^{\alpha-\alpha_1-\alpha_1+1}$. Daher muß zwangsläufig $\frac{c_1}{c_{1,1} \cdot c_{2,1}} = 1$ gelten, womit (i) und (ii) gezeigt sind.

zu (iii): Aufgrund des eben Bewiesenen gilt asymptotisch

$$n^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2+1} \approx \frac{\gamma_1(1)\,\gamma_2(1) \cdot \Gamma(\alpha)}{\gamma(1) \cdot \Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} > 0$$

also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ und, wegen $\alpha > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ &

# 4. SPEZIELLE GRONWALL-VERFAHREN

## 4.1 Euler-Knopp - Verfahren

4.1.1 Die FF-Matrix dieser, kurz mit $E_\vartheta$ (wobei $0 < \vartheta \le 1$) bezeichneten Verfahren, ist durch

$$a_{n\nu} := \begin{cases} \binom{n}{\nu}(1-\vartheta)^{n-\nu}\vartheta^\nu, & 0 \le \nu \le n \\ 0, & \nu > n \end{cases}$$

gegeben.

4.1.2 Satz (vgl. Gronwall [11], S. 115 f)

Die Euler-Knopp-Verfahren $E_\vartheta$, $0 < \vartheta \le 1$, sind identisch mit den Gronwall-Verfahren $(e_\vartheta, g)$, wobei $e_\vartheta(w) = \frac{\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w}$, $g(w) = (1-w)^{-1}$.

Beweis: Sei abkürzend $z = e_\vartheta(w)$. Wir erhalten

$$(1) \qquad z^{\nu+1} = (\vartheta w)^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{n}(1-\vartheta)^n w^n$$

$$= \vartheta w \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{n-\nu}(1-\vartheta)^{n-\nu}\vartheta^\nu w^n$$

und damit unter Berücksichtigung von

$$(2) \qquad 1-z = \frac{1-w}{1-(1-\vartheta)w}$$

$$(3) \qquad (1-w)^{-1}(1-z)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu = \frac{1}{\vartheta w}\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^{\nu+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(1-\vartheta)^{n-\nu}\vartheta^\nu s_\nu w^n$$

Wie man leicht verifiziert, ist $e_\vartheta$ biholomorph auf $\bar{E}$ mit $e_\vartheta(0) = 0$ und $e_\vartheta(1) = 1$. Wegen (2) ist

$$\Psi(w) = \Psi_{e_\vartheta}(w) = \frac{1}{1-(1-\vartheta)w} = \frac{1}{\vartheta} - \frac{1-\vartheta}{\vartheta}\,\frac{1-w}{1-(1-\vartheta)w}$$

Daher erweist sich $E_\vartheta$ als Gronwall-Verfahren $(e_\vartheta, g)$ mit $e_\vartheta \in \mathfrak{F}^{**}$, sobald wir $e_\vartheta(E) \subset E$ nachgewiesen haben. Wir finden

(4) $$(2-\vartheta)|z|^2 - (1-\vartheta)(z+\bar{z}) - \vartheta =$$

$$= \frac{(2-\vartheta)\vartheta^2|w|^2}{1-(1-\vartheta)(w+\bar{w})+(1-\vartheta)^2|w|^2} - \frac{(1-\vartheta)\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w} - \frac{(1-\vartheta)\vartheta\bar{w}}{1-(1-\vartheta)\bar{w}} - \vartheta$$

$$= \frac{(2-\vartheta)\vartheta^2|w|^2 + (1-\vartheta)\vartheta|w|^2 - \vartheta}{1-(1-\vartheta)(w+\bar{w}) + (1-\vartheta)^2|w|^2}$$

$$= \frac{(|w|^2-1)\vartheta}{1-(1-\vartheta)(w+\bar{w}) + (1-\vartheta)^2|w|^2} < 0$$

für alle $w \in \bar{E}-\{1\}$.
Es ist leicht einzusehen, daß

(5) $$\left|z - \frac{1-\vartheta}{2-\vartheta}\right| < \frac{1}{2-\vartheta}$$

eine zu (4) äquivalente Formulierung ist. $e_\vartheta(E)$ ist daher eine offene Kreisscheibe um $1-\frac{1}{2-\vartheta}$ mit Radius $\frac{1}{2-\vartheta}$ und somit eine Teilmenge von E. &

Die Permanenz der $E_\vartheta$ ergibt sich nach Satz 2.2.9 unmittelbar aus (1) für $\vartheta = 0$.

Wir können nun beweisen:

4.1.3 Satz (vgl. Knopp [12], § 3, Satz 2, S. 247)

Für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ gilt $E_\alpha \supset E_\beta$

Beweis: Nach Satz 2.3.7 und Satz 3.1.6 genügt es, die Permanenz von $(e_\beta^{-1} \circ e_\alpha\, ,\, (1-w)^{-1})$ zu zeigen. Wir finden

$$(6) \qquad e_\beta^{-1} \circ e_\alpha(w) = \frac{\delta w}{1-(1-\delta)w} = e_\delta(w) \qquad \left(0 < \delta := \frac{\alpha}{\beta} < 1\right)$$

$(e_\delta\, ,(1-w)^{-1}) = E_\delta \neq E_1$ ist jedoch permanent. &

Wegen Satz 3.4.4 folgern wir mit (6) sogleich

4.1.4 Satz (vgl. Knopp [12], § 3, Satz 1, S. 247)

Für $0 < \alpha, \beta \leq 1$ gilt $E_\alpha E_\beta = E_{\alpha \cdot \beta}$

## 4.2 Das Verfahren von de la Vallée-Poussin

4.2.1 Eine Reihe $\sum u_\nu$ heißt summierbar durch das Verfahren von de la Vallée-Poussin oder kurz $V_{1/2}$ summierbar, wenn die Folge

$$(*) \qquad v_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!\, n!}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}\, u_\nu \quad , \quad n \geq 0 \; ,$$

konvergiert.

4.2.2 Satz (Gronwall [11], S. 101 und S. 104 f)

$V_{1/2}$ ist identisch mit den Gronwall-Verfahren (f,g), wobei

$$(1) \qquad f(w) = \frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}} \quad , \quad g(w) = (1-w)^{-1/2} \; .$$

Es gilt $\lambda = 2$ und $f \in \mathfrak{F}^*$ .

Beweis: f ist stetig in 1 und holomorph in $\mathbb{C}-[1,\infty[$.
Mit der Funktion $h(z) := \frac{4z}{(1+z)^2}$ finden wir $h \circ f(w) = w$ für alle $w \in \mathbb{C}-]1,\infty[$. Daher ist f injektiv ebenda. Der Kreisrand $\partial E$ wird durch h auf die reelle Achse $1 \leq x < \infty$ abgebildet (zweimaliger Durchlauf):

$$h(e^{it}) = \frac{2}{1+\cos\varphi} \quad , \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Für alle $w \in \mathbb{C}-\{1\}$ mit $|f(w)| = 1$ gilt daher sogar $w \in \mathbb{C}-]1,\infty[$. Demnach haben wir $f(\bar{E})-\{1\} \subset E$. Schließlich ist noch

$$\frac{1-f(w)}{(1-w)^{1/2}} = \frac{2}{1-(1-w)^{1/2}}$$

$$= 2-\frac{2(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}}$$

also sowohl $\lambda = 2$ als auch $f \in \mathcal{F}^*$.
Daher ist (f,g) tatsächlich ein Gronwall-Verfahren.
Wir zeigen nun

$$(2) \qquad (1-w)^{-1/2}\left(f(w)\right)^{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n-\nu)!\,(n+\nu)!}\, w^n \quad , \quad \nu \in \mathbb{N}^0$$

Aufgrund von $b_n = (-1)^n\binom{1/2}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, können wir damit nämlich folgern (mit $z = f(w)$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} V_n w^n = (1-w)^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n-\nu)!\,(n+\nu)!} u_\nu w^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n-\nu)!\,(n+\nu)!} u_\nu w^n$$

was sofort 4.2.1(*) nach sich zieht.

Für $\nu = 0$ ist (2) evident; für $\nu = 1$ haben wir

$$(1-w)^{-1/2} z = (\tfrac{2}{w} - 1)(1-w)^{-1/2} - \tfrac{2}{w}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2\,(2n+2)!}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2} - \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \right) w^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n-1)!\,(n+1)!}\, w^n$$

Die Definition von f führt uns auf die Identität

$$z^2 + (2-\tfrac{4}{w})\, z + 1 \equiv 0 \quad ,$$

bzw. nach Multiplikation von $(1-w)^{-1/2}\, z^{\nu-1}$ auf

$$(1-w)^{-1/2} z^{\nu+1} + (2 \;\; \tfrac{4}{w})\,(1-w)^{-1/2} z^{\nu} + (1-w)^{-1/2}\, z^{\nu-1} = 0 \; .$$

Wir finden daher für $\nu \geq 1$

$$(1-w)^{-1/2} z^{\nu+1} = \left(\tfrac{4}{w} - 2\right) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n-\nu)!\,(n+\nu)!}\, w^n$$

$$- \sum_{n=\nu-1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n-\nu+1)!\,(n+\nu-1)!}\, w^n$$

Man sieht sofort, daß der Koeffizient von $w^{\nu-1}$ verschwindet.

Für die Koeffizienten höherer Potenzen erhalten wir

$$\frac{4\,(2n+2)}{2^{2n+2}\,(n+1-\nu)!\,(n+1+\nu)!} - \frac{2\,(2n)!}{2^{2n}\,(n-\nu)!\,(n+\nu)!} - \frac{(2n)!}{2^{2n}(n-\nu+1)!\,(n+\nu-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!\;(n-\nu)\,(n-\nu+1)}{2^{2n}\;(n-\nu+1)!\,(n+\nu+1)!}$$

$$= \begin{cases} 0 \;, & n = \nu \\[1ex] \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n-\nu-1)!\;(n+\nu+1)!} \;, & n > \nu \end{cases}$$

Durch vollständige Induktion ist somit der Beweis erbracht. &

Als Gronwall-Verfahren (f,g) mit $f(\bar{E})-\{1\} \subset E$ und $\lambda = 2$ hat $V_{1/2}$, nach Korollar 2.1.7, insbesondere die im folgenden Satz formulierte Eigenschaft:

4.2.3 Satz (Gronwall [11], Theorem 4, S. 111)

Für alle $\delta > -1$ gilt $C_\delta \subset V_{1/2}$

Die Darstellung 4.2.2 (1) legt eine Verallgemeinerung des de la Vallée-Poussinschen Verfahrens nahe.

4.2.4 Für Parameterwerte $0 < \alpha \leq 1$ definieren wir

$$f_\alpha(w) := \frac{1-(1-w)^\alpha}{1+(1-w)^\alpha} \quad , \quad g_\alpha(w) = (1-w)^{-\alpha}$$

und bezeichnen das so gegebene Gronwall-Verfahren $(f_\alpha, g_\alpha)$ mit $V_\alpha$ (Gronwall [11], S. 103 und S. 109 ff)

Wir müssen natürlich noch zeigen, daß $f_\alpha$ den Bedingungen 1.3.1 (i), (ii) und (iii) genügt.
Dazu folgen wir im großen und ganzen der Darstellung Gronwalls (vgl. [11], a.a.O.).

Mit $z = f_\alpha(w)$ ist

(1) $$\frac{1-z}{1+z} = (1-w)^\alpha$$

so daß, $\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ gesetzt,

$$\frac{1-f_\alpha(w)}{(1-w)^{1/\lambda_\alpha}} = \frac{2}{1+(1-w)^\alpha}$$

$$= 2 - \frac{2(1-w)^\alpha}{1+(1-w)^\alpha}$$

$$= 2 + O(|1-w|^\alpha) \quad \text{für } w \to 1$$

Um $f_\alpha(E)-\{1\} \subset E$ zu beweisen, stüzten wir uns auf die Gleichung (1), deren beide Seiten wir mit $Z$ bezeichnen. Die rechte Seite bildet $\mathbb{C}-[1,\infty[$ ab in einem Sektor der Z-Ebene

(2) $\quad Z = re^{i\theta}, \quad -\alpha\pi < \theta < \alpha\pi, \quad r>0$

wobei wir für $w \in \mathbb{C}-[1,\infty[$ die Darstellung

(3) $\quad 1-w = \rho e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad \rho>0$

benutzt haben. Die Abbildung ist injektiv, denn aus $(1-w_1)^\alpha = (1-w_2)^\alpha$ folgt $\rho_1 = \rho_2$ und $\alpha\varphi_1 - \alpha\varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ ; da jedoch $|\varphi_1-\varphi_2| < 2\pi$ und $0<\alpha\leq 1$ bleibt nur $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ .

Für die durch die linke Seite von (1) induzierte Abbildung $\quad z = \frac{1-Z}{1+Z}$

finden wir

$$|z|^2 = \frac{(1-Z)(1-\bar{Z})}{(1+Z)(1+\bar{Z})} = \frac{(1-|Z|^2)-2\mathrm{Re}\,Z}{(1-|Z|^2)+2\mathrm{Re}\,Z}$$

also $|z|<1$ falls $\mathrm{Re}\,Z > 0$.

Nun gilt für $w \in \bar{E}-\{1\}$ sicher $\mathrm{Re}\,w < 1$ und in (3) $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, also in (2) $|\theta| < \alpha\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ . Mithin $\mathrm{Re}\,Z > 0$ und daher $|f_\alpha(w)| = |z| < 1$.

Als Komposition zweier auf $\bar{E}$ injektiver Abbildungen ist auch $f_\alpha$ injektiv. Weiter ist $f_\alpha$ holomorph auf $\mathbb{C}-[1,\infty[$ und die Umkehrfunktion von $f_\alpha$ holomorph $f_\alpha(E)-\{1\}$ (wegen (1) und $\mathrm{Re}Z>0$ für $w\in\bar{E}-\{1\}$ ).

Folglich gilt $f_\alpha \in \mathfrak{F}$ , ja sogar $f_\alpha \in \mathfrak{F}^*$ . &

Wir wollen nun noch $V_\alpha \supset V_\beta$ für $\alpha<\beta$ zeigen. Wegen $\lambda_\alpha > \lambda_\beta$ bedarf es hierzu nur noch des Nachweises von $f_\alpha(\bar{E})-\{1\} \subset f_\beta(E)$ .

Dazu betrachten wir die über die Gleichung

$$f_\alpha(w) = f_\beta(\tilde{w})$$

definierte Abbildung $h: \bar{E} \to \mathbb{C}$ , $w \mapsto \tilde{w}$, und beweisen $h(\bar{E}-\{1\}) \subset E$. Wir finden leicht

$$\tilde{w} = 1-(1-w)^{\delta} \quad \text{mit} \quad \delta := \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

Für Punkte $w \in \partial E \sim \{1\}$ haben wir in Polarkoordinaten eine Darstellung

$$1-w = (2\cos\varphi)e^{i\varphi}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist $\tilde{w} = 1-(2\cos\varphi)^{\delta}e^{i\delta\varphi}$ und daher

$$|\tilde{w}|^2-1 = (2\cos\varphi)^{2\delta} - 2(\cos\varphi)^{\delta}\cos\delta\varphi$$

Nun müssen wir nur noch $H(\varphi) < 0$ zeigen für

$$H(\varphi) := \frac{|\tilde{w}|^2-1}{2(2\cos\varphi)^{\delta}}$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos\varphi)^{\delta} - \cos\delta\varphi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Es ist

$$(4) \qquad \frac{\cos\varphi}{\delta} H'(\varphi) = -\sin(1-\delta)\varphi - H(\varphi)\sin\varphi$$

Wir nehmen nun $0 \in H([0, \frac{\pi}{2}[)$ an. Sei $\varphi_0$ die kleinste dieser Nullstellen. Dann ist nach (4) $H'(\varphi_0) < 0$ im Widerspruch zu $H(0) = 2^{\delta-1}-1 < 0$. Wegen $H(-\varphi) = H(\varphi)$ sind wir daher fertig.

Nach Satz 2.1.6 und Korollar 3.1.7 haben wir also bewiesen:

4.2.5 Satz (Gronwall [11], Theorem 4, S. 111)

Für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ gilt $V_{\alpha} \supset V_{\beta}$

In gewisser Weise können wir die Verfahren $V_{\alpha}$ auch als Verallgemeinerung des "klassischen" Euler-Knopp-Verfahrens $E_{1/2}$ auffassen (vgl. Abschnitt 4.1). Dies ist nämlich wegen

$$f_1(w) = \frac{w}{2-w} \quad , \quad g_1(w) = (1-w)^{-1}$$

identisch mit $V_1$.

Daher bekommen wir mühelos

$$V_\alpha \supset E_{1/2} \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1$$

Diese Bemerkung gibt Anlaß, die Beziehung zwischen $V_\alpha$ und $E_\beta$ genauer zu untersuchen. Dies geschieht im nächsten Satz, dessen hinreichender Teil von Gronwall stammt.

4.2.6 Satz (vgl. Gronwall [11], Theorem 6, S. 117)

Für $0 < \alpha, \beta \leq 1$ haben wir $V_\alpha \supset E_\beta$ genau dann, wenn $(1-\beta)2^\alpha < 1$ .

Beweis: Nach dem oben Bemerkten, folgt die Aussage für $\alpha = 1$ ohne weiteres aus der Theorie der Euler-Knopp-Verfahren. Sonst haben wir $\lambda_\alpha > 1$ während die entsprechende Konstante für die $E_\beta$ gleich 1 ist.
Für $(1-\beta)2^\alpha = 1$ haben wir $f_\alpha(-1) = \frac{1-2^\alpha}{1+2^\alpha} = \frac{-\beta}{2-\beta} = e_\beta(-1)$
Nach Satz 3.1.4 ist daher die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha-1}{n} \left(1-\frac{2}{\beta}\right)^n$$

zwar $E_\beta$-summierbar (da $1 > \alpha$) aber nicht $V_\alpha$-summierbar.

Im Fall $(1-\beta)2^\alpha > 1$ ist $f_\alpha(w_o) = e_\beta(-1)$ für $w_o = 1 - \frac{1}{(1-\beta)^{1/\alpha}}$.
Insbesondere gilt $0 > w_o > 1-2$, also $w_o \in E$ und somit $e_\beta(-1) \in f_\alpha(E)$. Daher ist die Reihe ( 1) auch jetzt nicht V -summierbar (ebenfalls nach 3.1.4). Die Notwendigkeit der Bedingung $(1-\beta)2^\alpha < 1$ ist deshalb evident.

Um den hinreichenden Teil der Aussage zu verifizieren, transformieren wir den Kreis $e_\beta(E)$ (siehe 4.1.2 (4)) in die Z-Ebene, und erhalten

$$(2) \qquad 2(1-\beta)|Z|^2 - Z - \bar{Z} < 0$$

Den Punkten $z = f_\alpha(w)$, $w \in \partial E - \{1\}$ entsprechen in der Z-Ebene die Punkte $(1-w)^\alpha = (2\cos\varphi)^\alpha e^{i\alpha\varphi}$ mit $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Daher müssen wir nur noch zeigen, daß jene Punkte (2) genügen; dann haben wir nämlich $f_\alpha(\bar{E}) - \{1\} \subset e_\beta(E)$ und nach Satz 2.1.6 die Aussage.

Wir definieren

$$H(\varphi) := (1-\beta)(2\cos\varphi)^\alpha - \cos\alpha\varphi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Wegen $(1-\beta)2^\alpha < 1$ haben wir $H(0) < 0$; weiter finden wir

$$\frac{\cos\varphi}{\alpha} H'(\varphi) = -\sin(1-\alpha)\varphi - H(\varphi)\sin\varphi$$

Genau wie im Beweis zu Satz 4.2.5 können wir nun auf $H(\varphi) < 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ schließen.

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} & 2(1-\beta)\,|1-w|^{2\alpha} - (1-w)^\alpha - \overline{(1-w)^\alpha} \\ &= 2(1-\beta)(2\cos\varphi)^{2\alpha} - 2(2\cos\varphi)^\alpha \cos\alpha\varphi \\ &= 2(2\cos\varphi)^\alpha H(\varphi) < 0 . \end{aligned}$$ &

## 4.3 Mersman-Verfahren

4.3.1 Es handelt sich hierbei um die FF-Transformation

$$(*) \qquad U_n = \frac{1}{4^n}\sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} s_\nu \quad , \qquad n \geq 0$$

(Mersman [14], S. 667), die wir mit Rücksicht auf das Weitere mit $M_1$ bezeichnen wollen.

4.3.2 Satz (Scott-Wall [17], Theorem 7.1, S. 270)

$M_1$ ist identisch mit dem Gronwall-Verfahren $(f,g)$,

$$(1) \qquad f(w) = \frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}} \quad , \quad g(w) = (1-w)^{-1} .$$

Es gilt $\lambda = 2$ und $f \in \mathfrak{F}^*$.

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma

4.3.3 Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(1) $$2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{1/2}{k+1} = 1 - 4^{-n} \binom{2n+1}{n}$$

Beweis: Für $n = 1$ ist (1) evident. Ist (1) für $n-1 \geq 1$ richtig, so folgt mit $(-1)^k \binom{1/2}{k+1} = \binom{2k+1}{k} / (2k+1)2^{2k+1}$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{1/2}{k+1} &= (-2)^n \binom{1/2}{n+1} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{1/2}{k+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \binom{2n+1}{n} + 1 - 4^{-n+1} \binom{2n-1}{n-1} \\ &= 1 - 4^{-n} \binom{2n+1}{n} \left[ \frac{2(n+1)}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \right] \end{aligned}$$

womit (1) verifiziert ist. &

Beweis zu Satz 4.3.2: Mit $u_\nu^{(k)} := \delta_{\nu k}$, $\nu, k \in \mathbb{N}^0$, finden wir die Übereinstimmung von 4.3.1 (✱) und 4.3.2(1) notwendige Bedingung

(2) $$\frac{z^k}{1-w} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} w^n \quad , \ k \geq 0 \ .$$

(2) ist sogar hinreichend, denn die linke Seite bestimmt die Transformationsmatrix des Gronwall-Verfahrens (f,g) bereits vollständig.

Für $k = 0$ ist (2) trivial wegen $\frac{1}{4^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} = 1$ ;

für $k = 1$ haben wir, aufgrund von

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{2}{w} \left(1-w- (1-w)^{1/2}\right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n+1} (-w)^n \end{aligned}$$

und Lemma 4.3.3 ,

$$\frac{z}{1-w} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sum_{\nu=1}^{n} \binom{1/2}{\nu+1} (-1)^{\nu} w^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - 4^{-n} \binom{2n+1}{n}\right) w^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} w^{n}$$

Um (2) für $k > 1$ zu verifizieren, verwenden wir die aus (1) folgende Identität

$$z^{k+1} \equiv z^{k}\left(\frac{4}{w} - 2\right) - z^{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$

Wir bekommen so für $k \geq 1$

$$\frac{z^{k+1}}{1-w} = \left(\frac{4}{w}-2\right) \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} \left(\frac{w}{4}\right)^{n} - \sum_{n=k-1}^{\infty} \sum_{\nu=k-1}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} \left(\frac{w}{4}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=k-1}^{\infty} \left( \sum_{\nu=k}^{n+1} \left( \binom{2n+3}{n+1-\nu} - \binom{2n+1}{n+1-\nu} \right) - 2 \sum_{\nu=k}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} \right) \left(\frac{w}{4}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{\nu=k}^{n} \left( \binom{2n+3}{n+1-\nu} - \binom{2n+1}{n+1-\nu} - 2 \binom{2n+1}{n-\nu} \right) \left(\frac{w}{4}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} 4^{-n} \sum_{\nu=k+1}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} w^{n}$$

Nach vollständiger Induktion ist daher alles gezeigt. &

Unter Berücksichtigung von Satz 4.2.2, Bemerkung 2.2.3 sowie Korollar 3.1.7 können wir folgern

4.3.4 Satz (Scott-Wall [17], S. 271)

Es gilt $V_{1/2} \subset M_1$

4.3.5 Bemerkung

Die Definition 4.2.1 (*) des Mersman-Verfahrens gestattet eine naheliegende Verallgemeinerung. Es gilt nämlich die Identität ($T_n$ = n-tes Tschebyscheff-Polymon erster Art)

$$(1) \quad 2^{2n} \alpha^{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} T_{2\nu+1}(\alpha) \quad , \alpha \in \mathbb{C} , \; n \in \mathbb{N}^0 ,$$

weswegen wir für festes $\alpha \neq 0$ die FF-Transformation

$$(2) \qquad U_n = \frac{1}{4^n \alpha^{2n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} T_{2\nu+1}(\alpha) s_\nu$$

ansetzen können.

Wie man leicht verifiziert, sind die so definierten Verfahren $M_\alpha$ für Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, permanent. (Zum Beweis benutze man außer $T_{2\nu+1}(\alpha) > 0$ (für alle $\alpha \geq 1$) und (1) noch die für alle festen $\nu \geq 0$ gültige asymptotische Beziehung $\binom{2n+1}{n-\nu} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.)

Für das Weitere bemerken wir noch:

$$(3) \quad T_n(\alpha) = \frac{1}{2}\left[ \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)^n + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right)^n \right]$$

Wir wollen nun untersuchen, welche der durch 4.3.5 (2) für $\alpha \geq 1$ definierten Verfahren $M_\alpha$ zugleich Gronwall-Verfahren sind.
Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst

4.3.6 Lemma

Ein Verfahren $M_\alpha$, $\alpha \geq 1$, summiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (zum Wert $\frac{1}{1-z}$) genau dann, wenn

$$(1) \qquad \left| \frac{1}{\beta\sqrt{z}} + \beta\sqrt{z} \right| < 2\alpha \quad \text{mit} \quad \beta = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}$$

Beweis: Als $M_\alpha$-Transformierte der geometrischen Reihe erhalten wir

$$(2) \qquad \frac{1}{4^n \alpha^{2n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} T_{2\nu+1}(\alpha) \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z} =: \frac{1}{1-z} + R_n^{(\alpha)}(z)$$

Mit (1), (2), 4.3.5 (3) sowie $\tilde{\beta} := \alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$ ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{aligned} R_n^{(\alpha)}(z) &= \frac{z}{z-1} \frac{1}{(2\alpha)^{2n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} \left(\beta^{2\nu+1} + \tilde{\beta}^{2\nu+1}\right) z^\nu \\ &= \frac{z}{z-1} \frac{\beta^2 z - 1}{\beta z} \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \frac{\beta^2 z}{\beta^2 z - 1} 4^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} (\beta^2 z)^\nu \\ &\quad + \frac{z}{z-1} \frac{\tilde{\beta}^2 z - 1}{\tilde{\beta} z} \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \frac{\tilde{\beta}^2 z}{\tilde{\beta}^2 z - 1} 4^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} (\tilde{\beta}^2 z)^\nu \\ &= \frac{z}{z-1} \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \left[ \frac{\beta^2 z - 1}{\beta z} R_n^{(1)}(\beta^2 z) + \frac{\tilde{\beta}^2 z - 1}{\tilde{\beta} z} R_n^{(1)}(\tilde{\beta}^2 z) \right] \end{aligned}$$

Dabei haben wir nach Mersman (s. [14], Formel (14), S. 672)

$$(4) \qquad \begin{aligned} R_n^{(1)}(z) &= \frac{z}{z-1} 4^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} z^\nu \\ &= \frac{\sqrt{z}}{z-1} 4^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{\nu} (\sqrt{z})^{2n+1-\nu} (\sqrt{z})^{-\nu} \\ &= \frac{2\sqrt{z}}{z-1} 2^{-2n-1} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} + \sqrt{z} \right)^{2n+1} - \frac{z}{z-1} 4^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} z^{-\nu} \\ &= \frac{2\sqrt{z}}{z-1} \left( \frac{1+z}{2\sqrt{z}} \right)^{2n+1} + R_n^{(1)}\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

$M_1$ summiert die geometrische Reihe nach Satz 4.3.2 und Satz 3.1.2 sicherlich für $|z| \leq 1$, $z \neq 1$. Daher gilt $R_n^{(1)}(\frac{1}{z}) \to 0$ für $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Weiter schließen wir

$$(5) \qquad R_n^{(\alpha)}(z) = \frac{\sqrt{z}}{z-1}\left[\left(\frac{1+\beta^2 z}{2\alpha\beta\sqrt{z}}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} R_n^{(1)}\left(\frac{1}{\beta^2 z}\right) + \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\tilde{\beta}^2 z - 1}{\tilde{\beta}(z-1)} R_n^{(1)}(\tilde{\beta}^2 z)\right]$$

Wenn $R_n^{(1)}(\beta^2 z) \to 0$, dann gewiß auch $R_n^{(1)}(\tilde{\beta}^2 z) \to 0$, da $\tilde{\beta} \leq 1 \leq \beta$ und das durch (5) charakterisierte Summationsgebiet sternförmig bezüglich 0 ist.

Wegen $\beta \geq 1$ gilt $R_n^{(1)}(\frac{1}{\beta^2 z}) \to 0$ für $|z| \geq 1$, $z \neq 1$.
Daher geht $R_n^{(\alpha)}(z)$ gegen Null genau dann, wenn

$$(6) \qquad \left|\frac{1+\beta^2 z}{2\alpha\beta\sqrt{z}}\right| < 1$$

bzw. (1). &

4.3.7 Bemerkung

Mit $$f^{(\alpha)}(w) := \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}} \cdot \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-w}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-w}}$$

ist $$\left|\frac{1}{\beta\sqrt{f^{(\alpha)}(w)}} + \beta\sqrt{f^{(\alpha)}(w)}\right| = \left|\frac{2\alpha}{\sqrt{w}}\right| \geq 2\alpha$$

genau für $w \in \bar{E}$. Demnach ist das durch 4.3.6 (1) bestimmte Gebiet gerade das Innere des von der Kurve $\zeta = 1/f^{(\alpha)}(e^{it})$, $0 \leq t < 2\pi$, eingeschlossenen Gebietes.

Satz 3.1.6 zufolge, muß daher für eine Mersman-Verfahren $M_\alpha$, das zugleich ein Gronwall-Verfahren (f,g) ist, notwendig $f = f^{(\alpha)}$ gelten.

Im folgenden setzen wir $\frac{1}{\tau}$ für $\alpha$ und $\beta := \frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}}$ .

Wegen 4.3.2 (2) ist für alle $k \in \mathbb{N}^0$

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1-w}}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{w}{4}\right)^n \left[ \binom{2n-1}{n-k} - \binom{2n-1}{n-k-1} \right]$$

und folglich

$$(1) \qquad z^k = \left[ f^{(1/\tau)}(w) \right]^k = \beta^k \sum_{n=k}^{\infty} \left[ \binom{2n-1}{n-k} - \binom{2n-1}{n-k-1} \right] \left(\frac{\tau^2 w}{4}\right)^n$$

Ist nun ein Verfahren $M_{1/\tau}$ zugleich ein Gronwall-Verfahren, so gibt es ein $g \in \mathfrak{G}$ mit

$$(2) \qquad g(w)\, z^k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n w^n \frac{\tau^{2n+1}}{2^{2n}} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} T_{2\nu+1}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Andererseits gilt nach (1)

$$(3) \qquad g(w)\, z^k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta^k \sum_{\nu=k}^{n} \left[ \binom{2\nu-1}{\nu-k} - \binom{2\nu-1}{\nu-k-1} \right] \left(\frac{\tau^2}{4}\right)^{\nu} b_{n-\nu}\, w^n$$

(2) und (3) führen uns auf

$$(4) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^0: \quad \beta^k \sum_{\nu=k}^{n} \left[ \binom{2\nu-1}{\nu-k} - \binom{2\nu-1}{\nu-k-1} \right] \left(\frac{\tau}{4}\right)^{\nu} b_{n-\nu}$$

$$= b_n \frac{\tau^{2n+1}}{2^{2n}} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{2n+1}{n-\nu} T_{2\nu+1}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Insbesondere erhalten wir hieraus, $k = n$ gesetzt,

$$(5) \qquad \begin{aligned} \beta^n \frac{\tau^{2n}}{2^{2n}} b_0 &= b_n \frac{\tau^{2n+1}}{2^{2n}} T_{2n+1}\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ \frac{b_n}{b_0} &= \frac{\beta^n}{\tau\, T_{2n+1}\left(\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{2\, \beta^{2n} \sqrt{\beta}}{\tau\, (1+\beta^{2n+1})} \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich für $n = 3$ und $k = 2$

$$\beta^2 \frac{\tau^4}{2^4} b_1 + \beta^2 \cdot 4 \cdot \frac{\tau^6}{2^6} b_0 = b_3 \frac{\tau^7}{2^6} \left[ 7\, T_5\left(\frac{1}{\tau}\right) + T_7\left(\frac{1}{\tau}\right) \right]$$

Mit 4.3.5 (3) sowie $\tau = \frac{2\sqrt{\beta}}{\beta+1}$ folgt damit

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{b_3}{b_0} &= 8\,\beta^{11/2}\,\frac{1+\frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{b_1}{b_0}}{\tau\,(\beta^7+7\beta^6+7\beta+1)} \\ &= \frac{8}{\tau}\,\frac{\beta^{11/2}}{(\beta^7+7\beta^6+7\beta+1)} + \frac{16}{\tau^4}\,\frac{\beta^8}{(\beta^3+1)(\beta^7+7\beta^6+7\beta+1)} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von (6) und (5) (für n = 3) werden wir nun auf

$$B(\beta) := 3\beta^8-3\beta^6+\beta^5+2\beta^3+\beta^2-3\beta-1=0$$

bzw.

$$3(\beta-1)^8+24(\beta-1)^7+81(\beta-1)^6+151(\beta-1)^5+170(\beta-1)^4+120(\beta-1)^3+56(\beta-1)^2+16(\beta-1)=0$$

geführt. Letzterem entnimmt man $B(\beta) > 0$ für $\beta > 1$, d. h., (5) und (6) widersprechen einander für alle $\beta > 1$, bzw. $\alpha > 1$. Es gibt also kein $g \in \mathfrak{G}$ welches das Gleichungssystem (4) erfüllt.

Demnach haben wir bewiesen:

4.3.8 Satz

Die verallgemeinerten Mersman-Verfahren $M_\alpha$, $\alpha > 1$, sind keine Gronwall-Verfahren.

## 4.4 Die Verfahren von Obrechkoff und Rey Pastor.

4.4.1 Wir nennen die Reihe $\sum u_\nu$ Obrechkoff-p-summierbar zur Summe $s$ $(p \in \mathbb{N})$ oder kurz $\Omega_p$-summierbar, wenn die Folge

$$(*) \qquad s_n^{(p)} := \frac{1}{\binom{(p+1)n}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{(p+1)n-\nu}{n-\nu} (p+1)^\nu u_\nu$$

für $n \longrightarrow \infty$ gegen $s$ konvergiert (vgl. Birindelli [5], S. 253).

Zunächst setzen wir in $(*)$ den Parameter $p$ zu 1. Das so festgelegte Verfahren $\Omega_1$ ist identisch mit dem Gronwall-Verfahren $(Q_1, R_1)$ (s.u.) wobei

$$Q_1(w) := 1-(1-w)^{1/2}, \quad R_1(w) := (1-w)^{-1/2}$$

Die relevanten Eigenschaften von $Q_1$ weist man leicht nach. Insbesondere folgt $Q_1(\bar{E})-\{1\} \subset E$ aus dem Beweis zu Satz 4.2.5.

4.4.2 Für Parameter $p \in \mathbb{N}$ definieren wir allgemein $Q_p$ als diejenige Umkehrfunktion von

$$w := \tilde{Q}_p(z) := \left(1+\frac{1-z}{p}\right)^p \cdot z$$

welche nullpunkttreu ist. Aufgrund von

$$\tilde{Q}_p'(z) = \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{1-z}{p}\right)^{p-1}(1-z)$$

ist $Q_p'(z) = 0$ nur für $z = 1$ und $z = p+1$. Demnach läßt sich die zunächst nur in einer Umgebung von $w=0$ definierte Funktion $Q_p$ holomorph auf $\mathbb{C} - [1,\infty[$ fortsetzen. Weiter finden wir (vgl. Birindelli [5], S. 253 f)

$$
\begin{aligned}
1-w &= \left(1+\frac{1-z}{p}\right)^p (1-z) + \left[1-\left(1+\frac{1-z}{p}\right)^p\right] \\
&= \left(1+\frac{1-z}{p}\right)^p (1-z) + \left(1-\left(1-\frac{1-z}{p}\right)\right)\left[1+\left(1+\frac{1-z}{p}\right)^1+\cdots\right] \\
&= (1-z)\left\{1+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{1-z}{p}\right)^k-\frac{1}{p}\left[p+\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1-z}{p}\right)^k\right]\right\} \\
&= (1-z)^2\left\{\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{1-z}{p}\right)^{k-1}p^{-1}-\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1-z}{p}\right)^{k-1}\frac{1}{p^2}\right\} \\
&= (1-z)^2\left\{\frac{p+1}{2p}+\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\frac{(1-z)^{k-1}}{p^k}-\sum_{m=2}^{p-1}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\frac{(1-z)^{k-1}}{p^{k+1}}\right\}
\end{aligned}
$$

also $\lambda = \lambda_{Q_p} = 2$.
Außerdem gilt für $|z| = 1$, $z \neq 1$ mit $1-z = 2\cos t\ e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $1 < |w| = \left|1+\frac{1-z}{p}\right|^p \leq \left|1+\frac{2\cos t}{p}\right|^p \leq e^{2\cos t} \leq e^2$
also ist $Q_p(\bar{E}) - \{1\} \subset E$.
Daher haben wir $Q_p \in \mathfrak{F}_p$ und nach Bemerkung 2.1.10 $R_p := (1-Q_p)^{-1} \in \mathfrak{G}$. Somit ist $(Q_p, R_p)$ ein Gronwall-Verfahren.

Wir bestimmen nun die $(Q_p, R_p)$-Transformierte $U_n^{(p)}$ einer vorgegebenen Reihe $\sum u_\nu$.
Durch Integration längs des Randes eines hinreichend kleinen Kreises um den Ursprung der w-Ebene bzw. z-Ebene erhalten wir

$$
\begin{aligned}
b_n^{(p)} U_n^{(p)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint R_p(w) \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint (1-z)^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{\tilde{Q}_p'(z)\,dz}{[\tilde{Q}_p(z)]^{n+1}}
\end{aligned}
$$

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{1-z}{p}\right)^{-(np+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{dz}{z^{n+1}}\\
&= \left(\frac{p}{p+1}\right)^{np}\frac{1}{2\pi i}\oint\left(1-\frac{z}{p+1}\right)^{-(np+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{dz}{z^{n+1}}\\
&= \left(\frac{p}{p+1}\right)^{np}\frac{1}{2\pi i}\oint\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{np+k-\nu}{k-\nu}(p+1)^{\nu-k}u_\nu z^k \frac{dz}{z^{n+1}}\\
&= \left(\frac{p}{p+1}\right)^{np}(p+1)^{-n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{(p+1)n-\nu}{n-\nu}(p+1)^\nu u_\nu
\end{aligned}
\right.
$$

Da $(Q_p, R_p)$ permanent ist, folgt $\lim U_n^{(p)} = 1$ für die Transformierte der Reihe 1+0+0+... . Deshalb haben wir die asymptotische Beziehung

$$(2) \qquad b_n^{(p)} \approx b_n^{(p)} U_n^{(p)} = \binom{(p+1)n}{n}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{np}(p+1)^{-n}$$

Wenn wir jetzt (1) mit 4.4.1 (✱) vergleichen und (2) berücksichtigen, so zeigt sich, daß die Verfahren $(Q_p, R_p)$ und $\Omega_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$ äquivalent sind. Wegen $b_n^{(1)} = (-1)^n\binom{-1/2}{n} = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$ ergibt sich für $p = 1$ sogar die oben behauptete Identität.
Somit haben wir bewiesen:

**4.4.3** Satz (Birindelli [5], S. 255)

Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt $\Omega_p \approx (Q_p, R_p)$ und über dies $\Omega_1 = (Q_1, R_1)$

Wegen $\lambda_{Q_p} = 2$ und $Q_p(\bar{E}) - \{1\} \subset E$ für alle $p \in \mathbb{N}$, können wir insbesondere folgern (s. Korollar 2.1.7)

4.4.4 Satz (Birindelli [5], S. 255)

Für alle $p \in \mathbb{N}$ und $\delta > -1$ gilt $\Omega_p \supset C_\delta$ .

Die Verfahren $\Omega_1$ und $M_1$ (Mersman-V.) sind beide Gronwall-Verfahren mit $\lambda = 2$ . Daher müssen wir zum Beweis der folgenden Aussage auf Abschnitt 2.3 zurückgreifen.

4.4.5 Satz

Es gilt $\Omega_1 \subset M_1$

Beweis: Wir haben $\Omega_1 = (1-(1-w)^{1/2}, (1-w)^{-1/2}) =: (f_1, g_1)$ und $M_1 = \left(\frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}}, (1-w)^{-1}\right) := (f_2, g_2)$. Es ist $f_1 \in \mathfrak{F}^*$ (klar!) und $f_2 \in \mathfrak{F}^*$ wegen $\Psi_2(w) = 2 - \frac{2(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}}$

Also ist $f_1^{-1} \circ f_2 \in \mathfrak{F}$ aufgrund von Lemma 2.3.8.
Nach Bemerkung 2.2.3 und Korollar 3.1.7 ist sicher $(f_1, g_1) \subset (f_1, g_2)$. Weiter finden wir für

$$(1)\quad \begin{cases} f(w) := f_1^{-1} \circ f_2(w) = 1 - \left[1 - \frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}}\right]^2 \\ \qquad = 1 - \left[1 - \frac{1}{w}\left(1-(1-w)^{1/2}\right)^2\right]^2 \\ \qquad = 1 - 4\left[1 - \frac{1}{w} + \left(\frac{2}{w^2} - \frac{2}{w}\right)\left(1-(1-w)^{1/2}\right)\right] \end{cases}$$

mit $\qquad 1-(1-w)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \quad$ , worin

$$a_n = (-1)^{n+1}\binom{1/2}{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} > 0, \quad n \geq 1 \quad ,$$

nach kurzer Rechnung

$$\text{(2)} \qquad f(w) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1} - a_{n+2}\right) w^n$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \dfrac{2n+2}{2n+1} > 1$ ,

mithin also $a_{n+1} - a_{n+2} > 0$ .

Vermöge Satz 2.2.9 haben wir deshalb die Permanenz von $(f,(1-w)^{-1})$ bewiesen. (2) mit $a_{n+1} - a_{n+2} > 0$ zieht $f(\bar{E})-\{1\} \subset E$ nach sich. Daher gilt auch $f_2(E) \subset f_1(E)$. Satz 2.3.7 im Sinne der Satz 2.3.4 einleitenden Bemerkung liefert schließlich $(f_1,g_1) \subset (f_2,g_2)$. &

Wir wenden uns nun einer anderen Klasse von Verfahren zu.

4.4.6 Für $1 \leq a \leq e$ definieren wir die Funktion $h_a$ als diejenige Umkehrfunktion von

$$w := \tilde{h}_a(z) := za^{1-z}$$

die für $w=0$ verschwindet. Es ist

$$\tilde{h}_a'(z) = (1-z\ln a)a^{1-z}$$

mit $\tilde{h}_a'(z) \neq 0$ für $z \neq 1/\ln a$ und $\operatorname{Re} z < \infty$ (vgl. Birindelli [5], S. 246). Aus einer genügend kleinen Umgebung von $w=0$ heraus, läßt sich deshalb $h_a$ holomorph auf $\mathbb{C} - [1/\ln a, \infty[$ fortsetzen.
Weiterhin haben wir $1 < |w| = |z|\,|e^{1-z}| \leq e^{|1-z|} \leq e^2$ für alle $z \in \partial E - \{1\}$ , also $h_a(\bar{E})-\{1\} \subset E$.
Schließlich ist

$$\begin{aligned} 1-w &= 1-a^{1-z} + (1-z)a^{1-z} \\ &= 1-1-(1-z)\ln a \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[(1-z)\ln a]^{\nu}}{(\nu+1)!} + (1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[(1-z)\ln a]^{\nu}}{\nu!} \\ &= (1-z)\left[1-\ln a + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu!} - \frac{\ln a}{(\nu+1)!}\right)[(1-z)\ln a]^{\nu}\right] \end{aligned}$$

und insbesondere für $a = e$

$$1 - w = (1-z)^2 \left[ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \frac{(1-z)^{\nu-1}}{(\nu+1)!} \right]$$

Wegen Bemerkung 2.1.10 erweist sich daher $(h_a, (1-h_a)^{-1})$ als Gronwall-Verfahren mit $\lambda_a = \lambda_{h_a} = 1$ für $1 \leq a < e$ und $\lambda_e = 2$ (vgl. Birindelli [5], S. 249). Insbesondere sind die $h_a$ in $\mathcal{F}'$.

4.4.7 Mittels Integration längs des Randes eines hinreichend kleinen Kreises um den Ursprung der z-Ebene berechnen wir die Potenzen $z^\nu = [h_a(w)]^\nu$ :

$$z^\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta^\nu \frac{\tilde{h}_a'(\zeta)}{\tilde{h}_a(\zeta) - w} \, d\zeta$$

(1)
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \zeta^\nu \frac{\tilde{h}_a'(\zeta)}{\tilde{h}_a(\zeta)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{w}{\tilde{h}_a(\zeta)} \right)^k d\zeta$$

$$= \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{w^k}{2\pi i} \oint \zeta^\nu \frac{(1-\zeta \ln a)\, a^{1-\zeta}}{\zeta^{k+1} a^{(k+1)(1-\zeta)}} \, d\zeta$$

$$= \nu \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(k \ln a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!\, k} \left( \frac{w}{a} \right)^k , \qquad (\nu \in \mathbb{N})$$

Mit

(2)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu = s_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(k \ln a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!\, k} a^{-k} \nu s_\nu w^k$$

$$= s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(k \ln a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \cdot \frac{\nu}{k} a^{-k} s_\nu w^k$$

erhalten wir für die Gronwall $(h_a, (1-h_a)^{-1})$-Transformierte $(v_n^{(a)})$ der Folge $(s_n)$ die Identität

$$V_0^{(a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \nu \frac{(n \ln a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!\, n a^n} V_n^{(a)} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(a)} V_n^{(a)} w^n$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu z^\nu$$

und daher $v_0^{(a)} = s_0$ sowie

(3) $$v_n^{(a)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu \frac{(n \ln a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} s_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \nu \frac{(n \ln a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(vgl. Birindelli [5], S. 247)
Die dadurch gegebenen Verfahren wollen wir kurz mit $RP_a$ bezeichnen.

4.4.8 Im Grenzfall $a = e$ werden wir auf das von Rey Pastor stammende Reihe-Folge-Verfahren $RP = RP_e$ geführt (vgl. Rey Pastor [15]).
Für den Nenner in 4.4.7 (3) erhalten wir

(1) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \frac{n^{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu) \frac{n^\nu}{\nu!}$$
$$= n \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{n^\nu}{\nu!} - n \cdot \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{n^\nu}{\nu!}$$
$$= \frac{n^n}{(n-1)!}$$

- 108 -

Mit $s_k = \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu$ folgt daher in analoger Schlußweise

$$\sum_{k=1}^{n} k \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=\nu}^{n} k \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} u_\nu$$

$$= n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n^{n-\nu}}{(n-\nu)!} u_\nu$$

Demnach können wir 4.4.7 (3) umformen in

(2) $$v_n^{(e)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{(n-\nu)!} n^{-\nu} u_\nu \quad , \quad n \in \mathbb{N}^0$$

(vgl. Birindelli [5], S. 250).

Für das dem Rey Pastor-Verfahren entsprechende Gronwall-Verfahren $(h_e, (1-h_e)^{-1})$ erhalten wir aufgrund von 4.4.7 (2) und 4.4.8 (1)

$$\left(1-h_e(w)\right)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{n} \frac{n^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \left(\frac{w}{e}\right)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} e^{-n} w^n$$

also

$$RP = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n \cdot n!} e^{-n} w^n \, , \; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} e^{-n} w^n \right)$$

Aufgrund von

$$\lim_{p\to\infty} \tilde{Q}_p(z) = \lim_{p\to\infty} z\left(1+ \frac{1-z}{p}\right)^p = ze^{1-z} = \tilde{h}_e(z)$$

und $\Omega_p \approx (Q_p, R_p)$ vermutet man $\Omega_\infty \approx RP$ .

( $\Omega_\infty$ sei als dasjenige Verfahren definiert, dessen Matrix man im Limes $p \to \infty$ aus den Matrizen der

Verfahren $\Omega_p$ erhält; formal also $\Omega_\infty := \lim\limits_{p\to\infty} \Omega_p$ ).
In der Tat gilt sogar $\Omega_\infty = RP$ . Denn mit der Stirlingschen Formel finden wir für große $p \in \mathbb{N}$ die asymptotische Beziehung

$$\frac{((p+1)n-\nu)!}{(pn)!} \approx \frac{\sqrt{(p+1)n-\nu}}{\sqrt{pn}} \frac{((p+1)n-\nu)^{(p+1)n-\nu}}{(pn)^{pn}} \cdot e^{-(n-\nu)}$$

$$\approx (pn)^{n-\nu}$$

und daher

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\binom{(p+1)n-\nu}{n-\nu}}{\binom{(p+1)n}{n}} (p+1)^\nu = \lim_{p\to\infty} \frac{n!}{(n-\nu)!} \frac{(pn)^{n-\nu}}{(pn)^n} (p+1)^\nu$$

$$= \frac{n!}{(n-\nu)!} n^{-\nu} ,$$

so daß 4.4.1 (*) für $p \longrightarrow \infty$ in 4.4.8 (2) übergeht.

Wegen Satz 2.2.9, Bemerkung 1.3.3 und Satz 2.2.4, sind die Verfahren $RP_a$ , $1 \le a \le e$, alle permanent. Für $a = e$ können wir auch Korrolar 2.1.7 anwenden. Insgesamt haben wir also bewiesen:

4.4.4 Satz

(i) Die $RP_a$ , $1 \le a < e$ , sind permanente Gronwall-Verfahren.

(ii) RP ist stärker als jedes Cesaro-Verfahren

(iii) RP und $\Omega_\infty$ sind identisch.

Die Aussage (i) und die Beziehung (iii) hat man anscheinend noch nicht bemerkt.
Birindelli [5] läßt bei der Definition der Verfahren $RP_a$ auch Parameter $a > e$ zu. Dies ist jedoch nicht zulässig. Für $a > e$ ist nämlich wegen $\tilde{h}_a(\frac{1}{\ln a}) = 0$ die Funktion $h_a$ nicht biholomorph in E und daher $RP_a$ kein Gronwall-Verfahren. Die Schlüsse Birindellis auf den Seiten 248 und 249 ([Fußnote](5), Osservazione II) in [5] entbehren infolgedessen jeder Grundlage.

# 5. VERBINDUNG MIT ANDEREN KLASSEN VON LIMITIERUNGSVERFAHREN

## 5.1 Bewichtete Mittel

5.1.1 Bewichtete Mittel sind erklärt durch die FF-Transformation

$$(*) \qquad U_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu s_\nu \qquad , \qquad n \in \mathbb{N}^0 ,$$

wobei $(q_n)_{n \geq 0}$ irgendeine Folge ist mit $Q_n := \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$ . Abkürzend bezeichnen wir diese Verfahren mit $(M,(q_n))$.

Unser Ziel ist es, diejenigen Gronwall-Verfahren zu bestimmen, welche zugleich bewichtete Mittel sind. In der Literatur wird diese Frage nicht behandelt.

Um zu notwendigen Bedingungen zu gelangen, gehen wir aus von zwei identischen Verfahren $(f,g)$ und $(M,(q_n))$, und betrachten für $n,k \in \mathbb{N}^0$ die Folgen $s_n^{(k)} = \delta_{nk}$ ; aufgrund von 5.1.1 $(*)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}^0$ (wir erinnern an $z = f(w)$).

$$(1) \quad g(w)(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(k)} z^\nu = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{Q_n} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu s_\nu^{(k)} w^n$$

und somit für $k=0$

$$(2) \qquad z = 1 - \frac{q_0}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{Q_n} w^n$$

also insbesondere

$$(3) \qquad c_1 = f'(0) = \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{q_1}{Q_1} \qquad .$$

Die Gleichheit der beiden Verfahren erfordert die Übereinstimmung der Diagonalelemente der zugehörigen Transformationsmatrizen. D. h., für alle $n \in \mathbb{N}^0$ gilt

$$(4) \qquad \frac{q_n}{Q_n} = \frac{b_0}{b_n}\left[f'(0)\right]^n$$

und somit

$$(5) \qquad \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^n \cdot \frac{b_0}{b_n} = \left(\frac{Q_1}{q_1}\right)^n \cdot \frac{q_n}{Q_n}$$

Wir haben nun

$$\begin{aligned} g(w)(1-z)\, z^k &= \sum_{n=k}^{\infty} b_n \frac{q_k}{Q_n}\, w^n \\ &= b_0 q_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_1{}^n}{q_n}\, w^n \end{aligned}$$

also

$$(6) \qquad z^k = \left[b_0 q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_1 w)^n}{q_n}\right]^{-1} b_0 q_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(c_1 w)^n}{q_n}$$

Mit $t = c_1 w$ heißt dies mit $z = f(w) =: F(\frac{t}{c_1})$

$$(7) \qquad \left(\frac{F(t)}{t}\right)^k = \left[q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_n}\right]^{-1} q_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_{n+k}}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}^0$ gilt dann

$$\left(\frac{F(t)}{t}\right)^{k+1} = \left(\frac{F(t)}{t}\right)^k \cdot \frac{F(t)}{t}$$

mithin

$$q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_n} \cdot q_{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_{n+k+1}} = q_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_{n+k}} \cdot q_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{q_{n+1}}$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_0 \cdot q_{k+1}}{q_{\nu+k+1}\, q_{n-\nu}}\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_k \cdot q_1}{q_{\nu+k}\, q_{n+1-\nu}}\, t^n ;$$

insbesondere erhalten wir für $n = 1$ die für alle $k \in \mathbb{N}^0$ gültige Beziehung

$$(8) \qquad \frac{q_0}{q_1} + \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{q_k}{q_{k+1}}$$

Unsere bewichteten Mittel müssen in jedem Fall diesem Gleichungssystem genügen. Wir finden

$$\frac{q_m}{q_{m+1}} - \frac{q_0}{q_1} = \sum_{k=0}^{m-1} \left( \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}} - \frac{q_k}{q_{k+1}} \right) = m \cdot \left( \frac{q_1}{q_2} \quad \frac{q_0}{q_1} \right)$$

woraus mit $a := \frac{q_0}{q_1}$ ($a \neq 0$ wegen $Q_0 \neq 0$), $b := \frac{q_1}{q_2} - \frac{q_0}{q_1}$ folgt

$$(9) \qquad \frac{q_0}{q_{m+1}} = \frac{q_0}{q_1} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdots \frac{q_m}{q_{m+1}} = \prod_{\nu=0}^{m} (a + \nu b)$$

$$(10) \qquad q_m = \frac{q_0\, \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}{b^m\, \Gamma\left(\frac{a}{b} + m\right)} ,$$

$$(11) \qquad q_m = \frac{q_0}{a^m} = q_0 \left( \frac{q_1}{q_0} \right)^m$$

Wegen (9) ist hierbei $-\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^0$ ausgeschlossen. Um die zu dem bewichteten Mittel $(M, (q_n))$ gehörigen Gronwall-Verfahren zu bestimmen - falls existent - , betrachten wir zuerst den Fall $b = 0$. Wegen $Q_n \neq 0$ ist dann $a \neq -1$ . Aus (3), (5) und (11) ergibt sich

$$(12) \qquad \frac{b_n}{b_0} = c_1^n \frac{Q_n}{q_n} = c_1^n \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = c_1^n \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1} , & a \neq -1, 0, 1 \\ n+1 , & a = 1 \end{cases}$$

Falls $a = 1$, so haben wir für alle $m \in \mathbb{N}^0$ $q_m = q_o$.
Ferner muß $c_1 = 1$ gelten, denn aufgrund von (4) und (12) gilt

$$\text{(13)} \qquad \lim_{n \to \infty} \left( c_1^n \cdot \frac{n+1}{n^{\alpha-1}} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{b_o n^{\alpha-1}} = \frac{\gamma(1)}{b_o \Gamma(\alpha)} \neq 0$$

was $c_1 = 1$ unmittelbar nach sich zieht.

Daher erhalten wir

$$\frac{b_n}{b_o} = n + 1$$

und folglich

$$g(w) = b_o (1-w)^{-2}$$

und

$$f(w) = 1 - \frac{q_o}{b_o (1-w)^{-2}} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{b_o}{q_o} w^n$$

$$= 1-(1-w) = w$$

Für $a \neq -1, 0, 1$ haben wir nach (12)

$$\text{(14)} \qquad \frac{b_n}{b_o} = c_1^n \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = (c_1 a)^n \frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}$$

Zunächst sei $|a| < 1$.
Ein ähnliches Argument wie in (13) führt uns auch jetzt auf $c_1 = 1$.
Demzufolge ist

$$b_n = \frac{b_o}{1-a} (1-a^{n+1})$$

d. h. aber

$$g(w) = \frac{b_o}{1-a} \left( \frac{1}{1-w} - \frac{a}{1-aw} \right)$$

$$= b_o (1-aw)^{-1} (1-w)^{-1}$$

und somit

$$f(w) = 1 - \frac{q_o}{b_o} (1-w)(1-aw) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{b_o}{q_o} (ac_1 w)^n = w$$

Andererseits ist $(id, (1-aw)^{-1}(1-w)^{-1})$ für $|a| < 1$ tatsächlich das bewichtete Mittel $(M, a^{-m})$.

Im Fall $|a| > 1$ haben wir nach dem zweiten Teil der Formel (14) analog zu (13) $c_1 a = 1$.

Daraus schließen wir genau wie oben

$$g(w) = b_o(1-\frac{w}{a})^{-1}(1-w)^{-1}$$

bzw.
$$f(w) = 1-\frac{q_o}{b_o}(1-w)(1-\frac{w}{a})\sum_{n=o}\frac{b_o}{q_o}(ac_1w)^n$$
$$= \frac{w}{a}$$

Wegen $1 = f(1) = a^{-1}$ haben wir einen Widerspruch. Folglich sind die bewichteten Mittel $(M, a^{-m})$ mit $|a| > 1$ keine Gronwall-Verfahren.

Nun kommen wir zu $b \neq 0$. Nach (10) gilt

$$\frac{b_n}{b_o} = c_1^n b^n \Gamma(\frac{a}{b}+n)\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{b^k\Gamma(\frac{a}{b}+k)} \tag{15}$$

und daher

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = c_1 b\left(\frac{a}{b}+n\right)\left[1+\left(b^{n+1}\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{b^k\Gamma(\frac{a}{b}+k)}\right)^{-1}\right]$$
$$= c_1(a+nb)\left[1+\frac{b_o c_1^n}{(a+nb)\cdot b_n}\right]$$
$$= c_1(a+nb) + b_o c_1^{n+1} b_n^{-1}$$

Die linke Seite geht für $n \to \infty$ notwendig gegen 1. Deshalb führt die Annahme $|c_1| \neq 1$ sofort zu einem Widerspruch. Es folgt nun ohne Weiteres $b_n = O(n^{-1})$; das ist ein Widerspruch zu $b_n \approx \frac{\gamma(1)}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$.

Infolgedessen haben wir bewiesen:

5.1.2 Satz

Die Verfahren

$$(\mathrm{id},\ (1-w)^{-2}) = C_1 \qquad = (M,\ 1)$$

und $$(\mathrm{id},\ (1-\tfrac{w}{a})^{-1}(1-w)^{-1}) = (M,\ a^m) \text{ mit } |a| > 1$$

sind als einzige Gronwall-Verfahren zugleich bewichtete Mittel.

Das letztgenannte Verfahren ist hierbei konvergenzgleich. Dies beweist man etwa so: Für $|a| > 1$ ist die Funktion $(1-\frac{w}{a})^{-1}$ holomorph und nullstellenfrei auf $\bar{E}$ und es gilt $(1-\frac{w}{a})^{-1} = (1-\frac{1}{a})^{-1} + O(|1-w|)$ für $w \to 1$, also $(1-\frac{w}{a})^{-1} \in \mathcal{H}^*$; nach Satz 2.2.8 heißt dies $(\mathrm{id},\ (1-\frac{w}{a})^{-1}(1-w)^{-1}) \approx (\mathrm{id}, (1-w)^{-1})$.

## 5.2 Sonnenschein-Verfahren

5.2.1 Ein Sonnenschein-Verfahren wird definiert über eine FF-Matrix $S(h) := (h_{n\nu})$ mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} h_{n\nu}\zeta^\nu := [h(\zeta)]^n, (n \in \mathbb{N})$, worin $h$ eine auf $\bar{E}$ holomorphe Funktion mit $h(1) = 1$ ist.

5.2.2 Satz (Bustoz-Wright [10], Theorem 1, S. 40)

Die Verfahren $\left(\frac{\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w},\ (1-w)^{-1}\right)$, $0 < \vartheta \le 1$, sind als einzige Gronwall-Verfahren zugleich Sonnenschein-Verfahren und werden als solche durch $h(\zeta) = 1 + \vartheta(\zeta - 1)$ charakterisiert.

Beweis: Offensichtlich kommen für $S(h)$ nur untere Dreiecksmatrizen in Betracht. Dies bedeutet wegen $h(1) = 1$ schon

(1) $$h(\zeta) = 1 + \vartheta(\zeta - 1) = (1-\vartheta)\left(1 + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\zeta\right)$$

und daher

(2) $$h_{n\nu} = \begin{cases} \binom{n}{\nu}\vartheta^{\nu}(1-\vartheta)^{n-\nu}, & 0 \leq \nu \leq n \\ 0, & \nu > n \end{cases}$$

Folglich haben wir analog zu 5.1.1 (2)

(3) $$\begin{aligned} f(w) &= 1 - \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_{n0} w^n \\ &= 1 - \frac{g((1-\vartheta)w)}{g(w)} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $f'(0) = \vartheta \dfrac{b_1}{b_o}$, so daß wir analog zu 5.1.1 (4) auf

(4) $$\vartheta^n = h_{nn} = \frac{b_0}{b_n}\left[f'(0)\right]^n = \vartheta^n \frac{b_0}{b_n}\left(\frac{b_1}{b_0}\right)^n$$

geführt werden und deshalb $\dfrac{b_n}{b_o} = \left(\dfrac{b_1}{b_o}\right)^n$ bekommen.
Wegen Lemma 1.2.3 bleibt nur $b_1 = b_o$ und somit $b_n = b_o$. D. h. aber ($b_o$ zu 1 normiert)

$$g(w) = (1-w)^{-1}$$

Wir finden weiter mit (3)

$$f(w) = 1 - \frac{1-w}{1-(1-\vartheta)\,w}$$

$$= \frac{w}{1-(1-\vartheta)\,w}$$

Wie im Beweis zu Satz 4.1.2 gezeigt, muß $\frac{1}{\vartheta} = \psi(1) > 0$ gelten; ferner bedingt $f(E) \subset E$, aufgrund von 4.1.2 (5), $2-\vartheta \geq 1$ bzw. $0 < \vartheta \leq 1$.

Der hinreichende Teil des Beweises ist in 4.1.2 enthalten. &

## 5.3 Verallgemeinerte Jakimovski-Verfahren

5.3.1 Die hier betrachtete Verallgemeinerung der Jakimovski-Verfahren beruht auf einer ganzen Funktion $h$ und einer Folge $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n \neq -h(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die FF-Matrix des kurz mit $[h,(d_n)]$ bezeichneten Verfahrens wird definiert durch

$$(*) \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{h(\xi)+d_k}{h(1)+d_k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{n\nu}\, \xi^{\nu}, \qquad h_{00} := 1$$

(vgl. Zeller-Beekmann [22], § 70, S. 188).

5.3.2 Satz [1)]

Ein Summationsverfahren ist dann und nur dann zugleich Gronwall-Verfahren $(f,g)$ und Jakimovski-Verfahren $[h,(d_n)]$, wenn

$$f(w) = \frac{w}{1+\frac{b+d_2}{a}(1-w)}, \quad g(w) = \left(1+\frac{d_1-d_2}{a+b+d_2}\,w\right)(1-w)^{-1}$$

sowie $h(\xi) = a\xi + b$ mit $a \neq 0$ und $d_n = d_2$ für alle $n \geq 2$,

1) Siehe auch Bustoz-Wright [10], Theorem 2, S. 41.

wobei $\frac{b+d_2}{a} \geq 0$ und $\frac{d_2-d_1}{a+b+d_2} \in \bar{E} - \{1\}$.

Beweis: Wir übernehmen die Beweisidee von Abschnitt 5.1. Es kommen natürlich nur untere Dreiecksmatrizen $(h_{n\nu})$ in Frage, d. h., $h(\xi) = a\xi + b$.
Analog zu 5.1.1 (1) haben wir

(1) $$(1-z)\; z^k\, g(w) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n\, h_{nk}\, w^n$$

und daher

(2) $$z = 1 - \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} b_n\, h_{no}\, w^n ,$$

also $$c_1 = f'(0) = \frac{b_1}{b_o}(h_{oo} - h_{1o})$$

Andererseits gilt aufgrund von 5.3.1 (*)

(3) $$h_{nn} = \frac{a^n}{\prod_{\nu=1}^{n}(a+b+d_\nu)}, \quad h_{no} = \frac{\prod_{\nu=1}^{n}(b+d_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n}(a+b+d_\nu)}$$
$$h_{nn-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(b+d_\nu)\,a^{n-1}}{\prod_{\nu=1}^{n}(a+b+d_\nu)}$$

Die Bedingung $h_{nn} = \frac{b_o}{b_n}\left[f'(0)\right]^n$ zieht somit

(4) $$\frac{b_n}{b_o} = \left(\frac{b_1}{b_o}\right)^n \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{n}(a+b+d_\nu)}{(a+b+d_1)^n}$$

nach sich. Weiterhin haben wir wegen (1)

(5) $$z^k = \frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n h_{nk} w^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n h_{n0} w^n} = \frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{h_{nk}}{h_{nn}} (c_1 w)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n0}}{h_{nn}} (c_1 w)^n}$$

und daher mit $t = c_1 w$ und $z = f(w) =: F(\frac{t}{c_1})$

(6) $$\left(\frac{F(t)}{t}\right)^k = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k,k}}{h_{n+k,n+k}} t^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n0}}{h_{nn}} t^n}$$

Genau wie im Beweis zu Satz 5.1.2 folgt hiermit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k,k}}{h_{n+k,n+k}} t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+1,1}}{h_{n+1,n+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k+1,k+1}}{h_{n+k+1,n+k+1}} t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n0}}{h_{nn}} t^n$$

Für die Koeffizienten der ersten Potenz in $t$ erhalten wir

$$\frac{h_{k+1,k}}{h_{k+1,k+1}} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{h_{21}}{h_{22}} = \frac{h_{k+2,k+1}}{h_{k+2,k+2}} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{h_{10}}{h_{11}}$$

und folglich unter Berücksichtigung von (3)

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{b+d_\nu}{a} + \frac{b+d_1}{a} + \frac{b+d_2}{a} = \sum_{\nu=1}^{k+2} \frac{b+d_\nu}{a} + \frac{b+d_1}{a}$$

also $d_{k+2} = d_2$ für alle $k \in \mathbb{N}^0$ .

Mit (4) bekommen wir jetzt für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{b_n}{b_0} = \left(\frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{a+b+d_2}{a+b+d_1}\right)^n \frac{a+b+d_1}{a+b+d_2}$$

Wegen Lemma 1.2.3 muß der Klammerausdruck gleich 1 sein.
Daher haben wir $\frac{b_n}{b_o} = \frac{a+b+d_1}{a+b+d_2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ .
Nun können wir $g$ bestimmen ($b_o$ auf 1 normiert):

$$g(w) = 1 + \frac{a+b+d_1}{a+b+d_2} w(1-w)^{-1} \tag{7}$$

$$= \left(1 + \frac{d_1-d_2}{a+b+d_2} w\right)(1-w)^{-1} =: \gamma(w)(1-w)^{-1}$$

Die letzte Bedingung des Satzes sichert $\gamma(w) \neq 0$ für alle $w \in E \cup \{1\}$ ; andererseits ist sie auch notwendig hierfür.
Mit Hilfe von (2) und (3) erhalten wir nun

$$f(w) = 1 - \frac{1-w}{1+\frac{d_1-d_2}{a+b+d_2}w}\left\{1 + \frac{b+d_1}{a+b+d_2} w\left[1 + \left(\frac{b+d_2}{a+b+d_2}w\right)^1 + \dots\right]\right\}$$

$$= 1 - \frac{1-w}{1+\frac{d_1-d_2}{a+b+d_2}w} \cdot \frac{1+\frac{d_1-d_2}{a+b+d_2}w}{1-\frac{b+d_2}{a+b+d_2}w} \tag{8}$$

$$= \frac{a\,w}{a+(b+d_2)(1-w)}$$

Wir setzen $\vartheta := \frac{a}{a+b+d_2}$ . Dann ist $f(w) = \frac{w}{1-(1-\vartheta)w}$

Wie in 5.2 zeigt man, daß $0 < \vartheta \leq 1$ gelten muß. Dies bedingt $1 + \frac{b+d_2}{a} = \frac{1}{\vartheta} \geq 1$ .
Wir verifizieren jetzt $(f,g) = [h,(d_n)]$ . Dazu genügt es offensichtlich, die Gültigkeit von (6) für alle $k \in \mathbb{N}^0$ zu zeigen.

Mit (8) ist $\frac{F(t)}{t} = \frac{1}{1-\frac{b+d_2}{a}t}$ und weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n0}}{h_{nn}} t^n = 1 + \frac{b+d_1}{a} t \left[ 1 + \left( \frac{b+d_2}{a} t \right)^1 + \cdots \right]$$

$$= \left(1 + \frac{d_1-d_2}{a} t\right) \left(1 - \frac{b+d_2}{a} t\right)^{-1}$$

Daher folgt nach (6) für alle $k \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k,k}}{h_{n+k,n+k}} t^n = \left(1+\frac{d_1-d_2}{a}t\right)\left(1-\frac{b+d_2}{a}t\right)^{-k-1}$$

$$= \left(1+\frac{d_1-d_2}{a}t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \left(\frac{b+d_2}{a}t\right)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{n-1+k}{n-1}\left(\frac{b+d_1}{a}\right) + \binom{n-1+k}{n}\left(\frac{b+d_2}{a}\right) \right] \left(\frac{b+d_2}{a}\right)^{n-1} t^n$$

Andererseits erhalten wir auf direktem Wege für $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{h_{n\nu}}{h_{nn}} \xi^\nu$

$$\left(\xi+\frac{b+d_1}{a}\right)\left(\xi+\frac{b+d_2}{a}\right)^{n-1} = \left(\xi+\frac{b+d_1}{a}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \left(\frac{b+d_2}{a}\right)^{\nu} \xi^{n-1-\nu}$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left[ \binom{n-1}{\nu-1}\left(\frac{b+d_1}{a}\right) + \binom{n-1}{\nu}\left(\frac{b+d_2}{a}\right) \right] \left(\frac{b+d_2}{a}\right)^{\nu-1} \xi^{n-\nu}$$

Demnach gilt

$$\frac{h_{n\nu}}{h_{nn}} = \left[ \binom{n-1}{\nu}\left(\frac{b+d_1}{a}\right) + \binom{n-1}{\nu-1}\left(\frac{b+d_2}{a}\right) \right] \left(\frac{b+d_2}{a}\right)^{n-\nu-1}$$

Dies deckt sich mit den obigen Werten für die $h_{n+k,k}$ . Daher ist alles gezeigt. &

Eine mit dem vorstehenden Satz vergleichbare Aussage über herkömmliche Gronwall-Verfahren (d.s. G.-V. im Sinne der Einleitung 1.1) und (gewöhnliche) Jakimovski-Verfahren treffen Bustoz-Wright (s. [10] , Theorem 2, S.41). Die Beweise sind indessen wesentlich verschieden.

## 5.4 Hausdorff-Mittel

5.4.1 Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^0}$ eine beliebige Folge. Die FF-Matrix $(h_{n\nu})$ eines Hausdorff-Verfahrens $[H,(p_n)]$ ist definiert durch

$$(*) \qquad h_{n\nu} := \begin{cases} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu} p_\nu , & 0 \leq \nu \leq n \\ 0 , & \nu > n \end{cases}$$

Dabei gilt $\Delta^k p_\ell = \sum_{\nu=\ell}^{k} (-1)^{\nu-\ell} \binom{k}{\nu} p_\nu$ .

Wir wollen diejenigen Gronwall-Verfahren charakterisieren, die zugleich Hausdorff-Mittel sind. Einen entsprechenden Satz für herkömmliche (f,g)-Verfahren haben Scott-Wall [17] verifiziert. Bis auf einen rein technischen Zusatz (siehe (7) bis (11)) ist der folgende Beweis eine im großen und ganzen unveränderte Wiedergabe der Ausführungen auf den Seiten 267 und 268 in [17]. Die Beweisidee haben wir übrigens schon in 5.1 und 5.3 benutzt.

Wir gehen von zwei identischen Verfahren (f,g) und $[H,(p_n)]$ aus. Analog zu 5.1.1 (1) haben wir für alle $k \in \mathbb{N}^0$

$$(1) \qquad (1-z)g(w)\, z^k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n h_{nk} w^n$$

und speziell für k = o

$$(2) \qquad z = 1 - \frac{1}{g(w)} \sum_{n=o}^{\infty} b_n h_{no} w^n$$

sowie

$$(3) \qquad c_1 = f'(0) = \frac{b_1}{b_o}(h_{oo} - h_{1o}) = \frac{b_1}{b_o} \cdot p_1$$

Ferner ist wegen $h_{nn} = p_n$

$$(4) \qquad \frac{b_n}{b_o} p_n = \left(\frac{b_1}{b_o} \cdot p_1\right)^n = c_1^n \neq 0$$

Also ist $p_o = 1$ . O.B.d.A. können wir auch $b_o = 1$ setzen. Wir haben nun für alle $k \in \mathbb{N}^0$

$$(5) \qquad z^k = \frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{h_{nk}}{p_n} (c_1 w)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h_{no}}{p_n} (c_1 w)^n}$$

Wie im Beweis zu Satz 5.1.2 erhalten wir

$$(6) \qquad \left(\frac{F(t)}{t}\right)^k = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{no}}{p_n} t^n\right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k,k}}{p_{n+k}} t^n$$

und damit für alle $k \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{no}}{p_n} t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k+1,k+1}}{p_{n+k+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+1,1}}{p_{n+1}} t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+k,k}}{p_{n+k}} t^n$$

Demnach gilt für den Koeffizienten der ersten Potenz in t

$$(7) \qquad \frac{h_{oo}}{p_o} \cdot \frac{h_{k+2,k+1}}{p_{k+2}} + \frac{h_{10}}{p_1} \cdot \frac{h_{k+1,k+1}}{p_{k+1}} = \frac{h_{11}}{p_1} \cdot \frac{h_{k+1,k}}{p_{k+1}} + \frac{h_{21}}{p_2} \cdot \frac{h_{kk}}{p_k}$$

woraus mit (✱) für alle $k \in \mathbb{N}^0$ folgt

$$(k+2)\left(\frac{p_{k+1}}{p_{k+2}} - 1\right) + \frac{p_o}{p_1} - 1 = 2\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right) + (k+1)\left(\frac{p_k}{p_{k+1}} - 1\right)$$

also

$$(8) \qquad \frac{p_{k+1}}{p_{k+2}} + (k+1)\left(\frac{p_{k+1}}{p_{k+2}} - \frac{p_k}{p_{k+1}}\right) = 2\,\frac{p_1}{p_2} - \frac{p_o}{p_1}$$

Nun ist für $m \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\left[\frac{p_{k+1}}{p_{k+2}}-\frac{p_k}{p_{k+1}}\right] = \sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{k=\nu}^{m-1}\left(\frac{p_{k+1}}{p_{k+2}}-\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\frac{p_m}{p_{m+1}}-\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\right)$$

Folglich erhalten wir nach Summation der Gleichung (8) von $k = 0$ bis $k = m-1$

$$(10) \qquad (m+1)\frac{p_m}{p_{m+1}}-\frac{p_0}{p_1} = m\left(2\frac{p_1}{p_2}-\frac{p_0}{p_1}\right)$$

und damit

$$\frac{p_0}{p_{m+1}} = \prod_{k=0}^{m}\frac{p_k}{p_{k+1}} = \prod_{k=0}^{m}\left\{\frac{k}{k+1}\left(2\frac{p_1}{p_2}-\frac{p_0}{p_1}\right)+\frac{p_0}{(k+1)p_1}\right\}$$

$$=: \frac{b^{m+1}}{(m+1)!}\prod_{k=0}^{m}(k+a)$$

$$= \frac{b^{m+1}}{(m+1)!}\prod_{k=1}^{m+1}(k+a-1)$$

$$= b^{m+1}\binom{m+1+a-1}{m+1}$$

bzw.

$$(11) \qquad p_m = p_0\, b^{-m}\binom{m+a-1}{m}^{-1}$$

Hierbei haben wir $b := 2\,p_1/p_2 - p_0/p_1$ und $a := p_0/bp_1$ gesetzt. Insbesondere ist $b \neq 0$, denn andernfalls wäre nach (10) $p_m = p_1 \cdot m! \neq 0$ im Widerspruch zu (4) und Lemma 1.2.3.

Die Beziehungen (4) und (11) ergeben zusammen $b_n = c_1^n/p_n = b^n c_1^n \binom{n+a-1}{n}$ , was sofort $bc_1 = 1$ und $g(w) = (1-w)^{-a}$ nach sich zieht. Es muß $\alpha := \operatorname{Re} a > 0$

gelten. Weiter sogar $\beta := \mathrm{Jm}\, a = 0$, denn schon $(1-x)^{-i\beta} = \exp(-i\beta \ln(1-x)$ oszilliert für $x \to 1-$ im Betrage 1, d. h., $(1-w)^{-i\beta}$ ist nicht stetig im Punkt $w = 1$.

Nun erhalten wir mit $\vartheta := b^{-1}$

$$
\begin{aligned}
f(w) &= 1-(1-w)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n p_0 w^n \\
&= 1-(1-w)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha-1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} \frac{\vartheta^{\nu}}{\binom{\nu+\alpha-1}{\nu}} w^n \\
&= 1-(1-w)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha-1}{n-\nu} (-\vartheta)^{\nu} w^n \\
&= 1-(1-w)^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu+\alpha-1}{n} (-\vartheta w)^{\nu} w^n \\
&= 1-(1-w)^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-\vartheta w}{1-w}\right)^{\nu} \cdot (1-w)^{-\alpha} \\
&= 1-\frac{1-w}{1-w+\vartheta w} = \frac{\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w}
\end{aligned}
$$

Wie schon im Beweis zu Satz 5.2.2 gezeigt, gilt notwendig $0 < \vartheta \leq 1$. Infolgedessen haben wir jetzt bewiesen, daß höchstens die Gronwall-Verfahren $C_{\alpha-1}E_{\vartheta}$, $\alpha > 0$ $0 < \vartheta \leq 1$, zugleich Hausdorff-Mittel sind. Da die genannten Verfahren tatsächlich Hausdorff-Mittel sind, können wir also formulieren:

5.4.2 Satz (Scott-Wall [17], Theorem 6.1, S. 269)

Die Verfahren $\left(\frac{\vartheta w}{1-(1-\vartheta)w}, (1-w)^{-\alpha}\right)$, $0<\vartheta\leq 1$, $\alpha>0$, sind als einzige Gronwall-Verfahren zugleich Hausdorff-Mittel und werden als solche durch $\left[H, \vartheta^n \binom{n+\alpha-1}{n}^{-1}\right]$ charakterisiert.

# A N H A N G

## Ein Äquivalenzsatz für komplexe Verfahren vom Abel-Typ

Die in Abschnitte 3.4 gefaßte Definition gewisser Limitierungsverfahren vom Abel-Typ charakterisiert eine Verallgemeinerung der folgenden Klasse von komplexen Abel-Verfahren, welche wiederum eine Erweiterung ins Komplexe der von Borwein definierten Verfahren $A_\varkappa$ darstellt (vgl. [7], S. 318).
Eine Folge $(s_n)$ nennen wir $A_\varkappa(\theta)$-limitierbar $(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ zum Wert $s$ dann und nur dann, wenn

A.1 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n z^n$ für alle $z \in E$ konvergiert

und mit $\Phi_\varkappa(z) := (1-z)^{\varkappa+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n z^n$ gilt

(ii) für jedes $\theta' < \theta$ ist $\lim \Phi_\varkappa(z) = s$ für $z \to 1$ in $S(\theta')$.

Verlangen wir statt (ii) nur $\lim \Phi_\varkappa(z) = s$ für $z$ gegen $1-$ auf der reellen Achse, so haben wir gerade die Borweinschen Verfahren $A_\varkappa = A_\varkappa(0)$. Für diese Verfahren beweist Borwein die Relation $A_\varkappa \subset A_\mu$ für $-1 < \mu < \varkappa$ ([7], Theorem 2, S. 319).
Wir wollen die allgemeinere Beziehung $A_\varkappa(\theta) \subset A_\mu(\theta)$ für $-1 < \mu < \varkappa$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, verifizieren, und dann, unter entscheidender Verwendung von Satz 3.4.2, die folgende Aussage beweisen:

A.2 Satz

Für alle $\varkappa, \mu \geq 0$ und $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt

$$A_\varkappa(\theta) \approx A_\mu(\theta)$$

Anschließend ziehen wir noch Konsequenzen für Gronwall-Verfahren.

Wir beweisen nun die obengenannte Inklusion indem wir den entsprechenden Beweis von Borwein simulieren. Mit Borwein substituieren wir $1-z = (1+w)^{-1}$, so daß $\Phi_\varkappa(z)$ in

$$\Lambda_\varkappa(w) = (1+w)^{-\varkappa-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n \left(\frac{w}{1+w}\right)^n$$

übergeht. Statt A.1 (ii) haben wir jetzt: Für alle gilt $\Lambda_\varkappa(w) \longrightarrow s$ für $w \longrightarrow \infty$ mit $|\arg(1+w)| \leq \theta' < \theta$

Wir benötigen zwei Lemmata

A.3 Lemma (vgl. Borwein [7], Lemma 1, S. 318)

Für $\varkappa > \mu > -1$, $n \in \mathbb{N}^0$ gilt [1)]

$$\frac{\Gamma(\varkappa+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\varkappa-\mu)} \binom{n+\varkappa}{n} w^{-\varkappa} \int_0^w (w-t)^{\varkappa-\mu-1} t^{\mu+n} (1+t)^{-\varkappa-1-n}\, dt$$

$$= \binom{n+\mu}{n} (1+w)^{-\mu-1} \left(\frac{w}{1+w}\right)^n$$

Beweis: Wir substituieren $\zeta = \frac{t}{1+t}$, $z = \frac{w}{1+w}$, und erhalten

$$\int_0^w (w-t)^{\varkappa-\mu-1} t^{\mu+n} (1+t)^{-\varkappa-1-n}\, dt = (1-z)^{1+\mu-\varkappa} \int_0^z (z-\zeta)^{\varkappa-\mu-1} \zeta^{\mu+n}\, d\zeta$$

$$= (1-z)^{1+\mu-\varkappa} z^{\varkappa+n} \int_0^1 (1-\tau)^{\varkappa-\mu-1} \tau^{\mu+n}\, d\tau$$

[1)] Unter $\int_0^w$ wollen wir Integration längs des Strahles von 0 bis w verstehen.

$$= (1-z)^{1+\mu-\varkappa} z^{\varkappa+n} \frac{\Gamma(\varkappa-\mu)\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\varkappa+n+1)}$$

Damit folgt die Aussage sofort. &

A.4 Lemma (Für $\theta = 0$ vgl. Borwein [7], Lemma 2, S. 319)

Die Folge $(s_n)$ sei $A_\varkappa(\theta)$-limitierbar, $\varkappa > \mu > -1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Dann gilt für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} w > -1$

$$\Lambda_\mu(w) = \frac{\Gamma(\varkappa+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\varkappa-\mu)} w^{-\varkappa} \int_0^w (w-t)^{\varkappa-\mu-1} t^\mu \Lambda_\varkappa(t)\, dt$$

Beweis: Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n z^n$ kompakt in E. Wie man leicht nachweist, ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n \left(\frac{w}{1+w}\right)^n$ kompakt konvergent in der Halbebene $\operatorname{Re} w > -1$. Daher können wir gliedweise integrieren:

$$\int_0^w (w-t)^{\varkappa-\mu-1} t^\mu \Lambda_\varkappa(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} \int_0^w (w-t)^{\varkappa-\mu-1} t^{\mu+n} (1+t)^{-\varkappa-1-n} dt$$

Nach dem letzten Lemma ist das bereits die Aussage. &

A.5 Satz (Für $\theta = 0$ vgl. Borwein [7], Theorem 2, S. 319)

Für $\varkappa > \mu > -1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $A_\varkappa(\theta) \subset A_\mu(\theta)$

Beweis: Es genügt zu zeigen: $\Lambda_\mu(w) \to 0$ für $1+w = re^{i\varphi}$, $r \longrightarrow \infty$, $|\varphi| \leq \theta'$, wenn $\Lambda_\varkappa(w) \to 0$ für $w \longrightarrow \infty$ mit $|\arg(1+w)| \leq \theta'$ ($\theta' < \theta$ fest und beliebig nahe an $\theta$).
Wir stützen uns auf Lemma A.4 . Das dort aufgeschriebene Integral bezeichnen wir mit $I$ und zerlegen es in zwei Teile $I = \int_0^{w_0} + \int_{w_0}^{w} =: I_1 + I_2$ wobei $w_0 = r_0 e^{i\varphi} - 1$, $r_0 < r$, $r_0$ genügend groß.

Es ergeben sich folgende Abschätzungen:

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_0^{w_0} (w-\tau)^{\varkappa-\mu-1} \tau^{\mu} \Lambda_{\varkappa}(\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq \int_0^{w_0} |w|^{\varkappa-\mu-1} \left|1-\frac{\tau}{w}\right|^{\varkappa-\mu-1} |\tau|^{\mu} |\Lambda_{\varkappa}(\tau)|\, |d\tau| \\
&= O\left( |w|^{\varkappa-\mu-1} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{w_0}^{w} |w-\tau|^{\varkappa-\mu-1} |\tau|^{\mu} |\Lambda_{\varkappa}(\tau)|\, |d\tau| \\
&< \underbrace{\sup_{r \geq r_0} |\Lambda_{\varkappa}(w(r))|}_{o(r_0)} \cdot |w|^{\varkappa-1} \int_0^{w} \left|1-\frac{\tau}{w}\right|^{\varkappa-\mu-1} \left|\frac{\tau}{w}\right|^{\mu} |d\tau| \\
&\leq o(r_0) \cdot |w|^{\varkappa} \int_0^1 (1-\tau)^{\varkappa-\mu-1} \tau\, d\tau \\
&= o(r_0) \cdot O(r^{\varkappa}) \qquad \text{für} \quad r_0 < r \longrightarrow \infty,\ |\varphi| \leq \Theta'.
\end{aligned}
$$

Daher ist nach Lemma A.4

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{\mu}(w) &= O\left(|w|^{-\varkappa}\right) \cdot O\left(r^{\varkappa}\right) \cdot o(r_0) \\
&= o(r_0) \qquad \text{für} \quad r_0 < r \longrightarrow \infty,\ |\varphi| \leq \Theta'
\end{aligned}
$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $r_0$ und ein $r_1(r_0)$, so daß

$$
|\Lambda_{\mu}(w)| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad r > r_1 = r_1(r_0)\ . \quad \&
$$

Jetzt können wir das Hauptresultat beweisen:

Beweis zu Satz A.2 : Der Satz 3.4.2 ist offensichtlich auch für die Verfahren $A_\varkappa(\theta)$ richtig (wenn $\theta > 0$). Für alle $\theta \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varkappa \in \mathbb{N}^0$, haben wir nach Satz 3.4.2 $A_0(\theta) \subset A_\varkappa(\theta)$ und nach Satz A.5 auch die umgekehrte Inklusion, also $A_0(\theta) \approx A_\varkappa(\theta)$. Sei nun $\mu \geq 0$ und $\varkappa$ die kleinste natürliche Zahl $> \mu$. Nach Satz A.5 ist dann $A_\varkappa(\theta) \subset A_\mu(\theta) \subset A_{\varkappa-1}(\theta)$ womit die Aussage unmittelbar folgt. &

A.6 Bemerkung

Borwein hat gezeigt : $A_\varkappa \neq A_\mu$ für $\varkappa \neq \mu$ (vgl. [7], Theorem 3, S. 319). Daher ist in Satz A.2 die Beschränkung auf positive $\theta$ wesentlich.
Indes können wir die Behauptung auch auf Parameter $-1 < \varkappa, \mu < 0$ ausdehnen. Dazu bedarf es lediglich einer entsprechenden Erweiterung von Satz 3.4.2. Wir wollen auf die dahingehenden Ausführungen verzichten.

Für Reihen $\sum u_n$ mit $u_n = O(n^\delta)$ für ein $\delta \in \mathbb{R}$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} s_n z^n$ in $E$, unabhängig von $\varkappa > -1$. Deshalb erhalten wir anstelle von Satz 3.4.3, aufgrund der Sätze A.2 und A.5 :

A.7 Satz

Für Reihen $\sum u_n$ mit $u_n = O(n^\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ beliebig, gilt $(f,g) \subset A^*_\varkappa(\theta)$ mit Verträglichkeit, für alle $\varkappa > -1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Der Beweis zu Satz 3.4.5 funktioniert unter der Zusatzbedingung $u_n = O(n^\delta)$ auch für nichtganze $\varkappa \geq 1$ :

A.8 Satz

Für Reihen $\sum u_n$ mit $u_n = O(n^\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ beliebig, gilt $(f,g) \supset (f_2,g_2)(f_1,g_1)$ mit Verträglichkeit, wenn $f(\bar{E}) - \{1\} \subset f_1 \circ f_2(E)$, $\lambda > \lambda_1 \lambda_2$ und $g_1(w) = (1-w)^{-\alpha_1}$, $\alpha_1 \geq 1$ .

LITERATURVERZEICHNIS

A. Zeitschriftenartikel

[1] Amerio, L.: Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall.
Ann. mat. pura appl., Bologna (4) 18, 239-260 (1937).

[2] Bajšanski, B.: Généralisation d'un théorème de Carlemann.
Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 12, 101-108 (1958)

[3] Birindelli, C.: Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico.
Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa (2) 6, 179-190 (1937).

[4] Birindelli, C.: Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall.
Rend. Circ. mat. Palermo 61, 157-176 (1938)

[5] Birindelli, C.: Sui metodi di Gronwall per la sommazione delle serie.
Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa (2) 8, 241-270 (1939)

[6] Birindelli, C.: Relazioni ricorrenti tra particolare procedimenti (f,g) di Gronwall. Estensione dei metodi (f,g) per la sommazione generalizzata delle serie multiple.
Rend. Circ. mat. Palermo 63, 1-32 (1941)

[7] Borwein, D.: On a scale of Abel-type summability methods.
Proc. Cambridge Phil. Soc. 52, 318-322 (1958)

[8] Bustoz, J.: On the relation between [f,g] and $A_\lambda$ Summability.
Can. J. Math. 26, 783-793 (1974)

[9] Bustoz, J., Wright, D.: On Gronwall Summability.
Math. Z. 125, 177-183 (1972)

[10] Bustoz, J., Wright, D.: A Note on Gronwall Transforms.
Applicable Analysis 6, 39-45 (1976)

[11] Gronwall, T.H.: Summation of series and conformal mapping.
Annals of Math. (2) 33, 101-117 (1932)

[12] Knopp, K.: Über das Eulersche Summierungsverfahren
Math. Z. 15, 226-253 (1922)

[13] Knopp, K.: Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation.
Acta Math. 47, 313-335 (1926)

[14] Mersman, W.A.: A new method for divergent series. Bull. Amer. math. Soc. 44, 667-673 (1938)

[15] Rey Pastor, J.: Un método de sumacion de series. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 450-455 (1931)

[16] Perron, O.: Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. Math. Z. 18, 157-172 (1923)

[17] Scott, W.T., Wall, H.S.: The transformation of series and sequences. Trans. Amer. math. Soc. 51, 255-279 (1942)

B. Monographien

[18] Behnke, H., Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 1976

[19] Hardy, G.H.: Divergent series. At the Clarendon Press, Oxford, 1949 (berichtigter Nachdruck 1973)

[20] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1964

[21] Titchmarsh, E.C.: The theory of functions. Oxford, 2. Auflage, 1939

[22] Zeller K., Beekmann, W.: Theorie der Limitierungsverfahren. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1970

[23] Beekmann, W.: Grundbegriffe der Limitierungstheorie. Lehrtext zum Seminar über Limitierungstheorie/Funktionentheorie, Fernuniversität Hagen, 1980

SYMBOLLISTE